서울대 수학박사들이 만든
인공지능 수학선생님

마타수학

개념기본서

수학(상)

I 다항식

01 다항식

정의 & 포인트 확인

- 단항식
- 다항식
- 다항식의 정리
- 다항식의 덧셈과 뺄셈
- 다항식의 덧셈에 대한 성질

- 다항식의 곱셈
- 다항식의 곱셈에 대한 성질
- 곱셈 공식 I
- 곱셈 공식 II
- 곱셈 공식 III
- 곱셈 공식의 변형 I
- 곱셈 공식의 변형 II

- 다항식의 나눗셈

01-1 다항식의 덧셈과 뺄셈

다항식의 뜻

다음과 같이 수와 문자의 곱으로 이루어진 식을 단항식이라 한다.

$$7,\quad 2x,\quad 3y^2,\quad 2x^2y,\quad 4x^2y^3$$

단항식에서 특정 문자에 대하여 곱해진 문자의 개수를 단항식의 차수라 하고, 그 문자를 제외한 부분을 계수라 한다.

식 $2x^2y$는 $2\times x\times x\times y$로 수와 문자의 곱으로만 이루어져 있으므로 단항식이다. 이 단항식은 문자 x에 대하여 x가 두 개 곱해져 있으므로 x에 대한 이차식이고, 문자 x를 제외한 $2y$가 계수이다.

계수

$2x^2y = 2y \times x^2$

x에 대한 이차식

단항식 $2x^2y$는 y에 대하여 계수가 $2x^2$인 일차식이고 x, y에 대하여 계수가 2인 삼차식이다.

정 의 상 1.1 **단항식**

- 수와 문자의 곱으로 이루어진 식을 **단항식**이라 한다.
- 단항식에서 특정 문자에 대하여 곱해진 문자의 개수를 단항식의 **차수**라 하고, 그 문자를 제외한 부분을 **계수**라 한다.

단항식이 아닌 식

$\dfrac{1}{x}$, $\sqrt{xy}$와 같이 나눗셈으로 된 식이나 근호를 포함하고 있는 식은 단항식이 아니다.

보기 1.1 다음 중 단항식인 것만을 있는 대로 고르시오.

ㄱ. $3y$ ㄴ. 4 ㄷ. xz^2 ㄹ. x^3+1 ㅁ. $\dfrac{2}{x}$

보기 1.2 단항식 $2x^3yz^2$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) x에 대한 차수와 계수 (2) y에 대한 차수와 계수

(3) x, y에 대한 차수와 계수 (4) y, z에 대한 차수와 계수

다음과 같이 한 개 이상의 단항식의 합으로 이루어진 식을 다항식이라 한다.

$$x^2+3+4x,\quad x^2+3xy+2,\quad 6-y,\quad 3x-5xy$$

다항식을 이루고 있는 각각의 단항식을 항이라 한다. 다항식 x^2+3+4x에서는 x^2, 3, $4x$가 항이다.

x^2+3+4x

항

보기 정답

1.1 ㄱ, ㄴ, ㄷ

1.2 (1) 차수: 3차, 계수: $2yz^2$
(2) 차수: 1차, 계수: $2x^3z^2$
(3) 차수: 4차, 계수: $2z^2$
(4) 차수: 3차, 계수: $2x^3$

다항식에서 차수가 가장 높은 항의 차수를 그 다항식의 차수라 하고 차수가 1인 다항식을 일차식, 차수가 2인 다항식을 이차식이라 한다. 다항식 $x^2+3xy+2$는 x에 대한 이차식이고 y에 대한 일차식이며, x, y에 대한 이차식이다.

$x^2+3xy+2$	$x^2+3xy+2$	$x^2+3xy+2$
x에 대한 이차식	y에 대한 일차식	x, y에 대한 이차식

이때, 특정 문자를 포함하지 않는 항을 상수항이라 한다. x에 대한 다항식 $x^2+3xy+2$에서 상수항은 2이고, y에 대한 다항식 $x^2+3xy+2$에서 상수항은 x^2+2이다.

$x^2+3xy+2$	$x^2+3xy+2$
x에 대한 다항식 → 상수항	y에 대한 다항식 → 상수항

특정 문자와 그 문자에 대한 차수가 같은 항을 동류항이라 한다. x에 대한 다항식 $3x-5xy$에서 $3x$와 $-5xy$의 차수는 모두 1이므로 동류항이다.

$3x-5xy$

동류항

동류항은 계수들끼리 연산을 하여 간단히 정리할 수 있다.
x에 대한 동류항 $3x$와 $-5xy$는 $(3-5y)x$와 같이 간단히 정리된다.

> 차수가 n인 다항식을 n차식 또는 n차 다항식이라 한다.

> 다항식의 차수는 동류항끼리 모아서 정리한 후에 정해진다. x에 대한 다항식
> $$x^2+x-2-x^2$$
> 은 이차식처럼 보이지만 정리하면 $x-2$이므로 일차식이다.

정의 다항식
상 1.2

- 한 개 이상의 단항식의 합으로 이루어진 식을 **다항식**이라 하고, 다항식을 이루고 있는 각각의 단항식을 **항**이라 한다.
- 다항식에서 차수가 가장 높은 항의 차수를 **다항식의 차수**라 한다.
- 특정 문자를 포함하지 않는 항을 **상수항**, 특정 문자에 대하여 차수가 같은 항을 **동류항**이라 한다.

> 단항식은 항이 1개인 다항식으로 볼 수 있다.

보기 1.3 다항식 $2x^4+x^2y^3-3xy+5x+y^2+2y+3$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 다항식의 항의 개수 (2) x에 대한 다항식의 차수
(3) y에 대한 다항식의 차수 (4) x에 대한 일차항의 계수
(5) y에 대한 상수항 (6) x, y에 대한 다항식의 차수

보기 정답

1.3 (1) 7개 (2) 4차 (3) 3차
(4) $-3y+5$ (5) $2x^4+5x+3$
(6) 5차

다항식의 정리

특정 문자에 대한 항의 차수를 이용하여 다항식을 정리하면 연산할 때 편리하다. 정리 방법은 차수가 높은 항부터 낮아지는 순서로 정리하는 방법과 반대로 차수가 낮은 항부터 높아지는 순서로 정리하는 방법 두 가지가 있다.

x에 대한 다항식 x^2+3+4x를 x의 차수가 높은 항부터 낮아지는 순서로 정리하면 x^2+4x+3이고, x의 차수가 낮은 항부터 높아지는 순서대로 정리하면 $3+4x+x^2$이다.

정 의 상 1.3 **다항식의 정리**

- 특정 문자에 대하여 차수가 높은 항부터 낮아지는 순서로 다항식을 정리하는 것을 **내림차순으로 정리**한다고 한다.
- 특정 문자에 대하여 차수가 낮은 항부터 높아지는 순서로 다항식을 정리하는 것을 **오름차순으로 정리**한다고 한다.

다항식은 일반적으로 내림차순으로 정리한다.

보기 1.4 다항식 $x^3+2x^2y^2-y^2+2xy+4y+x-3$을

(1) x에 대하여 내림차순으로 정리하시오.

(2) y에 대하여 내림차순으로 정리하시오.

다항식의 덧셈과 뺄셈

두 다항식 A, B에 대하여 합 $A+B$는 두 다항식 A와 B의 각 항을 동류항끼리 모은 후 계수끼리 더하여 간단히 정리한 식이다. 또한, 두 다항식의 차 $A-B$는 다항식 A와 $-B$의 각 항을 동류항끼리 모은 후 더한 식이다. 이때, $-B$는 다항식 B의 각 항에 $-$를 곱하여 부호를 바꾼 식이다.

두 다항식 $A=x^2-3$, $B=x+5$에 대하여 두 다항식의 합 $A+B$와 두 다항식의 차 $A-B$는 다음과 같다.

$$A+B=(x^2-3)+(x+5)=x^2+x+2$$

$$A-B=(x^2-3)-(x+5)=x^2-x-8$$

다항식 $-A$

다항식 $A=x^2-3$에 대하여

$$-A=-(x^2-3)=-x^2+3$$

보기 정답

1.4 (1) $x^3+2y^2x^2+(2y+1)x-y^2+4y-3$
(2) $(2x^2-1)y^2+(2x+4)y+x^3+x-3$

괄호가 있는 경우에는 괄호를 풀고 동류항끼리 모아서 덧셈과 뺄셈을 계산한다. 괄호 앞에 상수가 곱해진 경우, 분배법칙을 이용하여 괄호를 푼다.

두 다항식 $A=x^2-3$, $B=x+5$에 대하여 $2A+B$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}2A+B&=2(x^2-3)+(x+5)\\&=(2x^2-6)+(x+5)\\&=2x^2+x-1\end{aligned}$$

정 의 상 1.4 **다항식의 덧셈과 뺄셈**

- **다항식의 덧셈** 두 다항식 A, B에 대하여 $A+B$는 동류항끼리 모은 후, 계수를 더하여 간단히 정리한 식이다.
- **다항식의 뺄셈** 두 다항식 A, B에 대하여 $A-B$는 다항식 A에 다항식 B의 각 항의 부호를 바꾼 $-B$를 더한 식이다.

두 다항식을 더한 식과 뺀 식은 모두 다항식이다. 이때 실수의 덧셈에서 성립하는 여러 가지 성질들은 다항식의 덧셈에서도 성립한다.

포인트 상 1.5 **다항식의 덧셈에 대한 성질**

세 다항식 A, B, C에 대하여

- **덧셈의 교환법칙** $A+B=B+A$
- **덧셈의 결합법칙** $(A+B)+C=A+(B+C)$

예 시 세 다항식 $A=x^2-3$, $B=x+5$, $C=x$에 대하여 다항식의 덧셈에 대한 성질을 확인해보자.

(1) 덧셈의 교환법칙은

$$A+B=(x^2-3)+(x+5)=x^2+x+2$$
$$B+A=(x+5)+(x^2-3)=x^2+x+2$$

이므로 $A+B=B+A$이다.

(2) 덧셈의 결합법칙은

$$\begin{aligned}(A+B)+C&=\{(x^2-3)+(x+5)\}+x\\&=(x^2+x+2)+x=x^2+2x+2\\A+(B+C)&=(x^2-3)+\{(x+5)+x\}\\&=(x^2-3)+(2x+5)=x^2+2x+2\end{aligned}$$

이므로 $(A+B)+C=A+(B+C)$이다.

보기 1.5 두 다항식 $A=x+1$, $B=x-1$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $A+B$ (2) $A-B$ (3) $3A$

다항식의 뺄셈

다항식의 뺄셈은 계수의 부호를 바꾼 다항식의 덧셈과 같으므로 뺄셈에 대한 성질은 덧셈의 성질과 같다.

세 다항식 A, B, C에 대하여

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

에서 어떤 다항식을 먼저 더해도 계산 결과는 동일하다. 따라서 세 다항식의 합 $A+B+C$를 계산 할 때, $(A+B)+C$ 또는 $A+(B+C)$ 중 어떤 방법으로 계산해도 상관없다.

보기 정답

1.5 (1) $2x$ (2) 2 (3) $3x+3$

예제 01

두 다항식 A, B에 대하여

$$A+B=x^2+2x+3,\quad A-B=x^2-3x+2$$

일 때, 다항식 A, B를 각각 구하시오.

| 길잡이 | 다항식 A, B를 미지수로 하는 연립방정식을 풀어서 각 다항식을 구한다.

| 풀 이 |

1단계 식 $A+B$와 $A-B$를 더하면 다항식 B가 소거된다.

다항식 A, B를 미지수로 하는 연립방정식을 생각하자.

$$\begin{cases} A+B=x^2+2x+3 & \cdots ㉠ \\ A-B=x^2-3x+2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

다항식 B를 소거하기 위해 ㉠+㉡을 하면

$$2A=(x^2+2x+3)+(x^2-3x+2)=2x^2-x+5$$

이다. 양변에 $\frac{1}{2}$을 곱하면

$$A=\frac{1}{2}(2x^2-x+5)=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

1 • 다항식의 덧셈에 대한 성질(p.17)
• 다항식의 덧셈과 뺄셈(p.17)

2단계 식 $A+B$에서 $A-B$를 빼면 다항식 A가 소거된다.

다항식 A를 소거하기 위해 ㉠−㉡을 하면

$$2B=(x^2+2x+3)-(x^2-3x+2)=5x+1$$

이다. 양변에 $\frac{1}{2}$을 곱하면

$$B=\frac{1}{2}(5x+1)=\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}$$

2 • 다항식의 덧셈에 대한 성질(p.17)
• 다항식의 덧셈과 뺄셈(p.17)
• 다항식(p.15)

| 정답 | $A=x^2-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$, $B=\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}$

돌다리 두드리기

두 다항식 A, B에 대하여 $A+B=x^2+4x+2$, $-A+B=x^2-6x+4$일 때, 다항식 A, B를 각각 구하시오.

돌다리 두드리기

| 답 | $A=5x-1$, $B=x^2-x+3$

두 다항식 A, B에 대한 연립방정식을 풀면

$$(A+B)+(-A+B)=2B=2x^2-2x+6$$

$$(A+B)-(-A+B)=2A=10x-2$$

이므로 $A=5x-1$, $B=x^2-x+3$이다.

정답 및 풀이 p.486

개념 그대로

유제 01-1

세 다항식 $A=5x^3-3x^2+4$, $B=3x^3-2x^2+4x+1$, $C=x^3-x^2+2$에 대하여 다항식 $A+B-C$를 구하시오.

다항식 $A+B-C$는 동류항끼리 묶어서 내림차순으로 정리하면 된다.

$$\begin{aligned} &A+B-C \\ &=(5x^3-3x^2+4)+(3x^3-2x^2+4x+1)-(x^3-x^2+2) \\ &=(5x^3+3x^3-x^3)+(-3x^2-2x^2+x^2)+(4x)+(4+1-2) \\ &=(5+3-1)x^3+(-3-2+1)x^2+4x+3 \\ &=7x^3-4x^2+4x+3 \end{aligned}$$

에서 $A+B-C=7x^3-4x^2+4x+3$이다.

답 $7x^3-4x^2+4x+3$

개념 더하기

유제 01-2

+ 다항식의 정리(p.16)

두 다항식 $A=x^3+2x^2-x+1$, $B=2x^3+x^2-5x-4$에 대하여 $2A-3(A-B)$를 구하시오.

두 다항식 A, B를 각각 문자로 보고 먼저 $2A-3(A-B)$를 간단히 정리하면

$$2A-3(A-B)=2A-3A+3B=-A+3B$$

이다. 이제 다항식 A, B를 $-A+3B$에 대입한 후, 동류항끼리 묶어서 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} &-A+3B \\ &=-(x^3+2x^2-x+1)+3(2x^3+x^2-5x-4) \\ &=(-x^3+6x^3)+(-2x^2+3x^2)+(x-15x)+(-1-12) \\ &=5x^3+x^2-14x-13 \end{aligned}$$

이다. 즉, 구하는 식은 $2A-3(A-B)=5x^3+x^2-14x-13$이다.

답 $5x^3+x^2-14x-13$

개념 더하기

유제 01-3

+ 다항식의 정리(p.16)

세 다항식 $A=2x^2y-3xy^2+6$, $B=3x^2y+xy^2-5$, $C=4x^2y-3xy^2+7$에 대하여 $(A-3B)+3(B+C)$에서 x^2y의 계수를 구하시오.

세 다항식 A, B, C를 각각 문자로 보고 구하고자 하는 식을 간단히 정리하면

$$(A-3B)+3(B+C)=A-3B+3B+3C=A+3C$$

이다. 이제 다항식 A, C를 식 $A+3C$에 대입한 후, 동류항끼리 묶어서 내림차순으로 정리하면

$$\begin{aligned} &A+3C \\ &=(2x^2y-3xy^2+6)+3(4x^2y-3xy^2+7) \\ &=(2x^2y+12x^2y)+(-3xy^2-9xy^2)+(6+21) \\ &=14x^2y-12xy^2+27 \end{aligned}$$

이다. 따라서 x^2y의 계수는 14이다.

답 14

01-2 다항식의 곱셈과 곱셈 공식

다항식의 곱셈

지수법칙

실수 a, b와 자연수 m, n에 대하여 다음이 성립한다.

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$

단항식의 곱셈을 할 때, 지수법칙을 이용하여 식을 간단히 할 수 있다.

$$(x^2y)^4 \cdot (-2y^3) = x^{2\times4}y^4 \cdot (-2) \cdot y^3 = -2x^8y^{4+3} = -2x^8y^7$$

다항식의 곱셈에는 (단항식)×(다항식) 또는 (다항식)×(다항식)의 꼴이 있으며 지수법칙과 아래의 분배법칙을 이용하여 전개하고, 동류항끼리 모아 정리한다. 이때, 전개된 식을 전개식이라 한다.

$m(a+b) = ma + mb$	$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
분배법칙 1	분배법칙 2

예 시

(단항식)×(다항식) 분배법칙 1을 이용하여 전개한 후 정리한다.

$$x(2x+1) = (x \cdot 2x) + (x \cdot 1) = 2x^2 + x$$

(다항식)×(다항식) 분배법칙 2를 이용하여 전개한 후 정리한다.

$$(x+2)(x+3) = x^2 + 3x + 2x + 6 = x^2 + 5x + 6$$

정 의 상 1.6 **다항식의 곱셈**

다항식의 곱셈 두 다항식 A, B에 대하여 AB는 분배법칙과 지수법칙을 이용하여 전개하고, 동류항끼리 모아 정리한 식이다.

다항식의 덧셈, 뺄셈과 마찬가지로 두 다항식을 곱한 식도 다항식이고, 이 결과로부터 여러 개의 다항식을 곱하여 새로운 다항식을 만들 수 있다. 이때 실수의 곱셈에서 성립하는 여러 가지 성질들이 다항식의 곱셈에서도 성립한다.

포인트 상 1.7 **다항식의 곱셈에 대한 성질**

세 다항식 A, B, C에 대하여

- **곱셈의 교환법칙** $AB=BA$
- **곱셈의 결합법칙** $(AB)C=A(BC)$
- **곱셈의 분배법칙** $A(B+C)=AB+AC$, $(A+B)C=AC+BC$

세 다항식 A, B, C에 대하여 $(AB)C=A(BC)$에서 어떤 다항식을 먼저 곱해도 계산 결과는 동일하다. 따라서 세 다항식의 곱 ABC를 계산할 때, $(AB)C$ 또는 $A(BC)$ 중 어떤 방법으로 계산해도 상관없다.

예 시 세 다항식 $A=x-2$, $B=x-3$, $C=x+2$에 대하여 다항식의 곱셈에 대한 성질을 확인해보자.

(1) 곱셈의 교환법칙은

$$AB=(x-2)(x-3)=x^2-3x-2x+6=x^2-5x+6$$
$$BA=(x-3)(x-2)=x^2-2x-3x+6=x^2-5x+6$$

이므로 $AB=BA$이다.

(2) 곱셈의 결합법칙은

$$\begin{aligned}(AB)C&=\{(x-2)(x-3)\}(x+2)=(x^2-5x+6)(x+2)\\&=x^3+2x^2-5x^2-10x+6x+12=x^3-3x^2-4x+12\\A(BC)&=(x-2)\{(x-3)(x+2)\}=(x-2)(x^2-x-6)\\&=x^3-x^2-6x-2x^2+2x+12=x^3-3x^2-4x+12\end{aligned}$$

이므로 $(AB)C=A(BC)$이다.

(3) 곱셈의 분배법칙은

$$\begin{aligned}A(B+C)&=(x-2)\{(x-3)+(x+2)\}=(x-2)(2x-1)\\&=2x^2-x-4x+2=2x^2-5x+2\\AB+AC&=(x-2)(x-3)+(x-2)(x+2)\\&=(x^2-3x-2x+6)+(x^2+2x-2x-4)=2x^2-5x+2\end{aligned}$$

이므로 $A(B+C)=AB+AC$이다.

$$\begin{aligned}(A+B)C&=\{(x-2)+(x-3)\}(x+2)=(2x-5)(x+2)\\&=2x^2+4x-5x-10=2x^2-x-10\\AC+BC&=(x-2)(x+2)+(x-3)(x+2)\\&=(x^2+2x-2x-4)+(x^2+2x-3x-6)=2x^2-x-10\end{aligned}$$

이므로 $(A+B)C=AC+BC$이다.

보기 1.6 세 다항식 $A=x+1$, $B=x-1$, $C=2x-1$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) AB (2) BA (3) $A(B+C)$

보기 정답

1.6 (1) x^2-1 (2) x^2-1
(3) $3x^2+x-2$

다항식의 곱셈 공식

앞에서 배운 다항식의 덧셈과 곱셈을 이용하면 복잡한 식도 전개할 수 있지만, 곱셈 공식을 익혀 두면 복잡한 전개 과정을 거치지 않고도 빠르고 정확하게 다항식의 곱셈을 할 수 있다.

포인트 상 1.8 **곱셈 공식 I**

1. $m(a+b)=ma+mb$
2. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
3. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
4. $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$
5. $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

보기 1.7 다음 식을 전개하시오.

(1) $2(x+1)$ (2) $(x+1)^2$ (3) $(x-1)(2x+1)$

위의 식들은 곱하는 다항식의 항이 2개이고 이차식인 경우에 대한 곱셈 공식이다. 더 나아가 삼차식일 때의 곱셈 공식들을 알아보도록 하자.

포인트 상 1.9 **곱셈 공식 II**

1. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
2. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
3. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
4. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

보기 1.8 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+1)^3$ (2) $(x-1)^3$ (3) $(x-1)(x^2+x+1)$

다음 공식은 곱하는 다항식의 항이 3개일 때의 곱셈 공식이다.

포인트 상 1.10 **곱셈 공식 III**

1. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
2. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$ (교육과정 외)
3. $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$ (교육과정 외)

보기 1.9 다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+y-z)^2$ (2) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

(3) $(x+y+1)(x^2+y^2+1-xy-x-y)$

보기 정답

1.7 (1) $2x+2$ (2) x^2+2x+1 (3) $2x^2-x-1$

1.8 (1) x^3+3x^2+3x+1 (2) x^3-3x^2+3x-1 (3) x^3-1

1.9 (1) $x^2+y^2+z^2+2xy-2yz-2zx$ (2) x^4+x^2+1 (3) $x^3+y^3-3xy+1$

곱셈 공식의 변형

앞에서 배운 곱셈 공식을 응용하면 여러 가지 식의 값을 쉽게 구할 수 있다. 우선 두 문자로 이루어진 곱셈 공식을 변형해보자. 다음 곱셈 공식의 변형을 통해 두 문자의 합 또는 차, 제곱, 제곱의 합, 세제곱의 합 등 다양한 형태의 식의 값을 빠르게 구할 수 있다.

포인트 상 1.11 **곱셈 공식의 변형 I**

1. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab,\quad a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$
2. $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab,\quad (a-b)^2=(a+b)^2-4ab$
3. $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b),\quad a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

$|a+b|=\sqrt{(a-b)^2+4ab}$
$|a-b|=\sqrt{(a+b)^2-4ab}$

보기 1.10 $a+b=3,\ ab=2$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) a^2+b^2 (2) a^3+b^3 (3) $|a-b|$

이제 세 문자로 이루어진 곱셈 공식을 변형해보자. 두 문자로 이루어진 식과 마찬가지로 세 문자의 곱과 합, 두 문자씩 곱한 합, 제곱의 합, 세제곱의 합 등 다양한 형태의 식의 값을 빠르게 구할 수 있다.

포인트 상 1.12 **곱셈 공식의 변형 II**

1. $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$
2. $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
3. $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=\dfrac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}$
4. $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$ (교육과정 외)

보기 1.11 $a+b+c=4,\ ab+bc+ca=3$일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하시오.

보기 정답

1.10 (1) 5 (2) 9 (3) 1

1.11 10

예제 02 다음 물음에 답하시오.

(1) $(3x^2+2x-4)(x+1)$을 전개하시오.

(2) $(2x^2-x+3)(x^3-x^2+1)$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하시오.

길잡이 (1) 식을 전개할 때는 분배법칙과 지수법칙을 이용하여 순차적으로 계산하는 것이 기본이다. 이때 상수 및 부호의 계산에 주의하자.
또한 식을 전개한 다음에는 꼭 동류항끼리 모아서 간단히 정리한다.

(2) 전개식에서 특정한 항의 계수를 구할 때는 모든 항을 전개하지 않고 특정한 항이 나오는 경우만 계산하면 된다.

- 다항식의 곱셈에 대한 성질(p.21)
- 다항식의 곱셈(p.20)
- 다항식의 덧셈에 대한 성질(p.17)
- 다항식(p.15)

풀이

(1) 다항식의 곱셈을 이용하여 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(3x^2+2x-4)(x+1)&=3x^2(x+1)+2x(x+1)-4(x+1)\\&=3x^3+3x^2+2x^2+2x-4x-4\\&=3x^3+(3+2)x^2+(2-4)x-4\\&=3x^3+5x^2-2x-4\end{aligned}$$

(2) 단항식끼리 곱해서 x^2항이 나오는 경우는

$$2x^2\times 1=2x^2,\quad 3\times(-x^2)=-3x^2$$

의 두 가지가 있다. 동류항이므로 계수끼리 간단히 정리하면

$$2x^2+(-3x^2)=(2-3)x^2=-x^2$$

이다. 따라서 x^2의 계수는 -1이다.

정답 (1) $3x^3+5x^2-2x-4$ (2) -1

돌다리 두드리기

(1) $(2x^2+x+1)(x-2)$를 전개하시오.

(2) $(x^2-x-1)(x^3+2x^2+3)$의 전개식에서 x^2의 계수를 구하시오.

돌다리 두드리기

|답| (1) $2x^3-3x^2-x-2$ (2) 1

(1) (주어진 식) $=2x^2(x-2)+x(x-2)+(x-2)$
$=2x^3-4x^2+x^2-2x+x-2$
$=2x^3-3x^2-x-2$

(2) $x^2\times 3=3x^2$, $-1\times 2x^2=-2x^2$에서 x^2의 계수는 $3-2=1$

개념 그대로

유제 02-1

다음 식을 전개하시오.

(1) $(x^2-3x+4)(2x^2+x-1)$　　(2) $(x^2-2x+4)(x+1)-2(x+2)$

(1) $(x^2-3x+4)(2x^2+x-1)$

$=x^2(2x^2+x-1)-3x(2x^2+x-1)+4(2x^2+x-1)$

$=(2x^4+x^3-x^2)+(-6x^3-3x^2+3x)+(8x^2+4x-4)$

$=2x^4+(1-6)x^3+(-1-3+8)x^2+(3+4)x-4$

$=2x^4-5x^3+4x^2+7x-4$

(2) $(x^2-2x+4)(x+1)-2(x+2)$

$=x^2(x+1)-2x(x+1)+4(x+1)-2(x+2)$

$=(x^3+x^2)+(-2x^2-2x)+(4x+4)+(-2x-4)$

$=x^3+(1-2)x^2+(-2+4-2)x+(4-4)$

$=x^3-x^2$

답 (1) $2x^4-5x^3+4x^2+7x-4$
(2) x^3-x^2

개념 그대로

유제 02-2

$(2x^2+y-3)(3x^2-2y+1)$의 전개식에서 x^2y의 계수를 a, x^2의 계수를 b, y의 계수를 c라 할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.

두 다항식의 곱을 전개하고 내림차순으로 정리하면

$(2x^2+y-3)(3x^2-2y+1)$

$=2x^2(3x^2-2y+1)+y(3x^2-2y+1)-3(3x^2-2y+1)$

$=6x^4-4x^2y+2x^2+3x^2y-2y^2+y-9x^2+6y-3$

$=6x^4+(-4x^2y+3x^2y)+(2x^2-9x^2)-2y^2+(1+6)y-3$

$=6x^4-x^2y-7x^2-2y^2+7y-3$

이다. 따라서 $a=-1$, $b=-7$, $c=7$이므로 $a+b+c=-1$이다.

답 -1

개념 그대로

유제 02-3

$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^2$의 전개식에서 x^4의 계수를 구하시오.

주어진 식을 순차적으로 전개하면 $5\times5=25$개의 항이 나오므로, x^4항이 나오는 경우만 구하자.

$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)$

에서 x^4의 동류항은

$1\times5x^4,\ 2x\times4x^3,\ 3x^2\times3x^2,\ 4x^3\times2x,\ 5x^4\times1$

이다. 이 항의 계수들을 계산하여 정리하면

$(5+8+9+8+5)x^4=35x^4$

이므로 x^4의 계수는 35이다.

답 35

예제 03

다음 식을 전개하시오.

(1) $x^2(x+3y)$ (2) $(2x+3y)^2$

(3) $(3x+5y)(3x-5y)$ (4) $(4x-1)(5x+7)$

(5) $(2x+5)^3$ (6) $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$

길잡이 다항식의 전개에 있어 가장 기본이 되는 곱셈 공식을 적용하는 문제이다.

- $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$
- $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$
- $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$
- $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
- $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$, $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

단순히 공식의 암기로 끝이 아니다. 문제에 따라 적절한 공식을 적용하는 것이 익숙해질 때까지 연습이 필요하다.

• 곱셈 공식 II(p.22)
• 곱셈 공식 I(p.22)

풀 이

(1) $x^2(x+3y)=x^3+3x^2y$

(2) $(2x+3y)^2=(2x)^2+2\cdot(2x\cdot3y)+(3y)^2=4x^2+12xy+9y^2$

(3) $(3x+5y)(3x-5y)=(3x)^2-(5y)^2=9x^2-25y^2$

(4) $(4x-1)(5x+7)=(4\cdot5)x^2+(4\cdot7-1\cdot5)x-1\cdot7=20x^2+23x-7$

(5) $(2x+5)^3=(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot5+3\cdot2x\cdot5^2+5^3$
$=8x^3+60x^2+150x+125$

(6) $(x+3y)\{x^2-x\cdot3y+(3y)^2\}=x^3+(3y)^3=x^3+27y^3$

정답 (1) x^3+3x^2y (2) $4x^2+12xy+9y^2$
(3) $9x^2-25y^2$ (4) $20x^2+23x-7$
(5) $8x^3+60x^2+150x+125$ (6) x^3+27y^3

돌다리 두드리기

다음 식을 전개하시오.

(1) $(3x+y)^2$ (2) $(2x+3y)(2x-3y)$

(3) $(2x+3)^3$ (4) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$

(1) $(3x)^2+2\cdot(3x)\cdot y+y^2=9x^2+6xy+y^2$
(2) $(2x)^2-(3y)^2=4x^2-9y^2$
(3) $(2x)^3+3\cdot(2x)^2\cdot3+3\cdot(2x)\cdot3^2+3^3$
$=8x^3+36x^2+54x+27$
(4) $(2x)^3+(3y)^3=8x^3+27y^3=8x^3+27y^3$

돌다리 두드리기

| 답 | (1) $9x^2+6xy+y^2$
(2) $4x^2-9y^2$
(3) $8x^3+36x^2+54x+27$
(4) $8x^3+27y^3$

정답 및 풀이 p.487

개념 그대로

유제 03-1

다음 식을 전개하시오.

(1) $(2a-7b)^2$ (2) $(-a+4b)^2$

(3) $(xy-4)^3$ (4) $(2a-1)(4a^2+2a+1)$

(1) $(2a-7b)^2=(2a)^2-2\cdot(2a)\cdot(7b)+(7b)^2=4a^2-28ab+49b^2$

(2) $(-a+4b)^2=(-a)^2+2\cdot(-a)\cdot(4b)+(4b)^2=a^2-8ab+16b^2$

(3) $(xy-4)^3=(xy)^3-3\cdot(xy)^2\cdot 4+3xy\cdot(-4)^2-4^3$

$=x^3y^3-12x^2y^2+48xy-64$

(4) $(2a-1)(4a^2+2a+1)=(2a-1)\{(2a)^2+2a\cdot 1+1^2\}$

$=(2a)^3-1^3=8a^3-1$

답 (1) $4a^2-28ab+49b^2$
(2) $a^2-8ab+16b^2$
(3) $x^3y^3-12x^2y^2+48xy-64$
(4) $8a^3-1$

개념 더하기

유제 03-2

+ 다항식의 곱셈에 대한 성질(p.21)

다음 식을 전개하시오.

(1) $(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$ (2) $(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

(1) 곱셈 공식을 순차적으로 적용하면

$$\begin{aligned}&(x+y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\\&=(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\\&=(x^4-y^4)(x^4+y^4)\\&=x^8-y^8\end{aligned}$$

(2) 다항식의 곱셈에서 교환법칙이 성립함을 이용하여 식의 순서를 바꿔 곱셈 공식을 이용하여 전개하면

$$\begin{aligned}&(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)\\&=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)\\&=(a^3+b^3)(a^3-b^3)\\&=a^6-b^6\end{aligned}$$

답 (1) x^8-y^8 (2) a^6-b^6

개념 더하기

유제 03-3

+ 다항식의 덧셈과 뺄셈(p.17)
+ 다항식(p.15)

다항식 $(x-3)^3-(x+2)(x^2-2x+4)$에서 x^2의 계수를 구하시오.

곱셈 공식을 이용하여 전개한 후 x^2의 계수를 구한다.

$$\begin{aligned}&(x-3)^3-(x+2)(x^2-2x+4)\\&=(x^3-9x^2+27x-27)-(x^3+2^3)\\&=-9x^2+27x-35\end{aligned}$$

에서 x^2의 계수는 -9이다.

답 -9

예제 04

다음 식을 전개하시오.

(1) $(2x-3y+z)^2$

(2) $(x+y-z)(x^2+y^2+z^2-xy+yz+zx)$

(3) $(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)$

길잡이 문제에 적절한 공식을 적용하여 빠르게 전개할 수 있을 때까지 연습해보자.

- $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
- $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=a^3+b^3+c^3-3abc$
- $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

풀 이

(1)
$$(2x-3y+z)^2=(2x)^2+(-3y)^2+z^2+2\cdot(2x)\cdot(-3y)+2\cdot(-3y)\cdot z+2z\cdot(2x)$$
$$=4x^2+9y^2+z^2-12xy-6yz+4zx$$

(2)
$$(x+y-z)(x^2+y^2+z^2-xy+yz+zx)$$
$$=x^3+y^3+(-z)^3-3xy\cdot(-z)=x^3+y^3-z^3+3xyz$$

(3)
$$(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)=x^4+3^2x^2+3^4=x^4+9x^2+81$$

정답 (1) $4x^2+9y^2+z^2-12xy-6yz+4zx$
(2) $x^3+y^3-z^3+3xyz$
(3) x^4+9x^2+81

• 곱셈 공식 III(p.22)

돌다리 두드리기

다음 식을 전개하시오.

(1) $(x-2y-z)(x^2+4y^2+z^2+2xy-2yz+zx)$

(2) $(4x^2+2x+1)(4x^2-2x+1)$

돌다리 두드리기

|답| (1) $x^3-8y^3-z^3-6xyz$
(2) $16x^4+4x^2+1$

곱셈 공식을 이용하면

(1) $x^3+(-2y)^3+(-z)^3-3\cdot x\cdot(-2y)\cdot(-z)$
$=x^3-8y^3-z^3-6xyz$

(2) $(2x)^4+(2x)^2\cdot1^2+1^4=16x^4+4x^2+1$

정답 및 풀이 p.487

개념 그대로

유제 04-1

다음 식을 전개하시오.

(1) $(-2x+y+3z)^2$

(2) $(3a-b+2)(9a^2+b^2+3ab-6a+2b+4)$

(3) $(5+2a-b)(4a^2+b^2-10a+2ab+5b+25)$

(1) $(-2x+y+3z)^2$
$=(-2x)^2+y^2+(3z)^2+2\cdot(-2x)\cdot y+2y\cdot(3z)+2\cdot(3z)\cdot(-2x)$
$=4x^2+y^2+9z^2-4xy+6yz-12xz$

(2) $(3a-b+2)(9a^2+b^2+3ab-6a+2b+4)$
$=(3a-b+2)(9a^2+b^2+4+3ab+2b-6a)$
$=(3a)^3+(-b)^3+2^3-3\cdot(3a)\cdot(-b)\cdot 2$
$=27a^3-b^3+18ab+8$

(3) $(5+2a-b)(4a^2+b^2-10a+2ab+5b+25)$
$=(2a-b+5)(4a^2+b^2+25+2ab+5b-10a)$
$=(2a)^3+(-b)^3+5^3-3\cdot(2a)\cdot(-b)\cdot 5$
$=8a^3-b^3+30ab+125$

답 (1) $4x^2+y^2+9z^2-4xy+6yz-12xz$
(2) $27a^3-b^3+18ab+8$
(3) $8a^3-b^3+30ab+125$

개념 더하기

유제 04-2

+ 곱셈 공식 I(p.22)
+ 다항식의 덧셈과 뺄셈(p.17)

다음 식을 전개하시오.

(1) $(4a^2-6a+9)(4a^2+6a+9)$

(2) $(a^2+3a+9)(a^2-3a+9)-(a^2-9)(a^2+9)$

(1) $(4a^2-6a+9)(4a^2+6a+9)$
$=(2a)^4+4a^2\cdot 3^2+3^4$
$=16a^4+36a^2+81$

(2) $(a^2+3a+9)(a^2-3a+9)-(a^2-9)(a^2+9)$
$=(a^4+a^2\cdot 9+9^2)-(a^4-9^2)$
$=a^4+9a^2+81-a^4+81$
$=9a^2+162$

답 (1) $16a^4+36a^2+81$
(2) $9a^2+162$

개념 더하기

유제 04-3

+ 다항식의 덧셈과 뺄셈(p.17)

세 다항식 $A=x^2+3x+9,\ B=2x^2-2x+7,\ C=x^2+x-2$에 대하여 다항식 $A(B-C)$를 구하시오.

다항식의 뺄셈을 이용하여 $B-C$부터 계산하면

$$B-C=(2x^2-2x+7)-(x^2+x-2)=x^2-3x+9$$

이다. 이제 $A(B-C)$를 전개할 때, 곱셈 공식을 이용하면

$$A(B-C)=(x^2+3x+9)(x^2-3x+9)=x^4+9x^2+81$$

답 x^4+9x^2+81

예제 05

다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+b-c)(a-b-c)$　　(2) $(x-1)(x-2)(x+5)(x+6)$

길잡이 항을 순서를 변경하거나 치환을 이용하면 복잡한 다항식의 곱셈도 쉽게 전개할 수 있다.

(1) 바로 적용할 수 있는 곱셈 공식이 없어서 순차적으로 전개할 수도 있지만

$$(a+b-c)(a-b-c)=\{(a-c)+b\}\{(a-c)-b\}$$

와 같이 항의 순서를 바꾸면 곱셈 공식을 이용할 수 있다.

(2) 공통부분이 나타나도록 적절히 곱하는 순서를 바꾸어 전개를 시작한다. 짝을 지어 전개했을 때 일차항의 계수가 같아지도록 순서를 바꾸는 것이 좋다.

$$(\text{주어진 식})=(x-1)(x+5)(x-2)(x+6)=(\underline{x^2+4x}-5)(\underline{x^2+4x}-12)$$

풀이

(1) 항의 순서를 변경한 후 곱셈 공식을 이용하여 전개하면

$$\begin{aligned}(a+b-c)(a-b-c)&=\{(a-c)+b\}\{(a-c)-b\}\\&=(a-c)^2-b^2=a^2-2ac+c^2-b^2\end{aligned}$$

(2) 공통부분이 나타나도록 식의 순서를 바꾸어 곱하면

$$\begin{aligned}&(x-1)(x-2)(x+5)(x+6)\\&=\{(x-1)(x+5)\}\{(x-2)(x+6)\}\\&=(x^2+4x-5)(x^2+4x-12)\end{aligned}$$

와 같이 공통부분 x^2+4x가 나타난다. 이제 공통부분 x^2+4x를 X로 치환하면

$$\begin{aligned}&(x^2+4x-5)(x^2+4x-12)\\&=(X-5)(X-12)\\&=X^2-17X+60\end{aligned}$$

이다. $X=x^2+4x$를 다시 대입하여 전개를 마무리하자.

$$\begin{aligned}X^2-17X+60&=(x^2+4x)^2-17(x^2+4x)+60\\&=(x^4+8x^3+16x^2)-17x^2-68x+60\\&=x^4+8x^3-x^2-68x+60\end{aligned}$$

정답 (1) $a^2-2ac+c^2-b^2$
(2) $x^4+8x^3-x^2-68x+60$

- 곱셈 공식 I(p.22)
- 다항식의 곱셈에 대한 성질(p.21)
- 다항식의 덧셈에 대한 성질(p.17)

돌다리 두드리기

다음 식을 전개하시오.

(1) $(a+b+c)(a-b-c)$　　(2) $(x-1)(x-2)(x+3)(x+4)$

돌다리 두드리기

|답| (1) $a^2-b^2-c^2-2bc$
(2) $x^4+4x^3-7x^2-22x+24$

(1) (주어진 식) $=\{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}=a^2-b^2-c^2-2bc$

(2) (주어진 식) $=\{(x-1)(x+3)\}\{(x-2)(x+4)\}$
$=(x^2+2x-3)(x^2+2x-8)$
$=x^4+4x^3-7x^2-22x+24$

정답 및 풀이 p.487

개념 그대로

유제 05-1

다음 식을 전개하시오.

(1) $(-a+3b-c)(a+3b+c)$ (2) $(-2a+b-c)(2a-b-c)$

항의 순서를 변경하면 곱셈 공식을 이용할 수 있다.

(1) (주어진 식) $=\{3b-(a+c)\}\{3b+(a+c)\}$

$=(3b)^2-(a+c)^2=9b^2-a^2-2ac-c^2$

$=-a^2+9b^2-c^2-2ac$

(2) (주어진 식) $=\{-c-(2a-b)\}\{-c+(2a-b)\}$

$=(-c)^2-(2a-b)^2$

$=c^2-(4a^2-4ab+b^2)$

$=c^2-4a^2+4ab-b^2$

$=-4a^2-b^2+c^2+4ab$

답 (1) $-a^2+9b^2-c^2-2ac$
(2) $-4a^2-b^2+c^2+4ab$

개념 그대로

유제 05-2

다음 식을 전개하시오.

(1) $(x^2+x-2)(x^2+x+6)$ (2) $(3x^2-x-3)(3x^2-x+5)$

공통부분을 한 문자로 치환하면 곱셈 공식을 적용할 수 있다.

(1) 공통부분을 $x^2+x=X$로 치환하면

(주어진 식) $=(X-2)(X+6)=X^2+4X-12$

이다. 다시 $X=x^2+x$를 대입하면

$X^2+4X-12=(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12$

$=x^4+2x^3+x^2+4x^2+4x-12$

$=x^4+2x^3+5x^2+4x-12$

(2) 공통부분을 $3x^2-x=X$로 치환하면

(주어진 식) $=(X-3)(X+5)=X^2+2X-15$

이다. $X=3x^2-x$를 다시 대입하면

$X^2+2X-15=(3x^2-x)^2+2(3x^2-x)-15$

$=9x^4-6x^3+x^2+6x^2-2x-15$

$=9x^4-6x^3+7x^2-2x-15$

답 (1) $x^4+2x^3+5x^2+4x-12$
(2) $9x^4-6x^3+7x^2-2x-15$

개념 그대로

유제 05-3

다음 식을 전개하시오.

(1) $x(x+1)(x+3)(x+4)$ (2) $(x-1)(x+2)(x+3)(x+6)$

(1) 일차항이 $4x$가 되도록 짝을 지어 전개하면

(주어진 식) $=\{x(x+4)\}\{(x+1)(x+3)\}$

$=(x^2+4x)(x^2+4x+3)$

이다. 공통부분을 $x^2+4x=X$로 놓으면

$(x^2+4x)(x^2+4x+3)=X(X+3)=X^2+3X$

이고, 다시 $X=x^2+4x$를 대입하면

$X^2+3X=(x^2+4x)^2+3(x^2+4x)$

$=x^4+8x^3+16x^2+3x^2+12x$

$=x^4+8x^3+19x^2+12x$

(2) 일차항이 $5x$가 되도록 짝을 지어 전개하면

(주어진 식) $=\{(x-1)(x+6)\}\{(x+2)(x+3)\}$

$=(x^2+5x-6)(x^2+5x+6)$

이다. 공통부분을 $x^2+5x=X$로 놓으면

$(x^2+5x-6)(x^2+5x+6)=(X-6)(X+6)=X^2-36$

이고, 다시 $X=x^2+5x$를 대입하면

$X^2-36=(x^2+5x)^2-36=x^4+10x^3+25x^2-36$

답 (1) $x^4+8x^3+19x^2+12x$
(2) $x^4+10x^3+25x^2-36$

예제 06

$a+b=3$, $ab=-2$일 때, 다음 식의 값을 구하시오. (단, $a>b$)

(1) a^2+b^2　(2) a^2-b^2　(3) a^3+b^3
(4) a^3-b^3　(5) a^4+b^4　(6) a^4-b^4

| 길잡이 | 두 수 a, b에 대하여 $a+b$ 또는 $a-b$와 ab를 이용하면 다양한 식의 값을 계산할 수 있다.

- $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$
- $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$
- $(a-b)^2=(a+b)^2-4ab$
- $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$
- $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$

| 풀 이 |

• 곱셈 공식의 변형 I(p.23)

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=3^2-2\cdot(-2)=13$

(2) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$이므로 식 $a-b$의 값이 필요하다. 곱셈 공식의 변형을 이용하면

$$(a-b)^2=(a+b)^2-4ab=3^2-4\cdot(-2)=17$$

에서 $a>b$ 조건에 의하여 $a-b=\sqrt{17}$이다. 따라서

$$a^2-b^2=3\times\sqrt{17}=3\sqrt{17}$$

(3) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=3^3-3\cdot(-2)\cdot3=45$

(4) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
$=(\sqrt{17})^3+3\cdot(-2)\cdot\sqrt{17}=11\sqrt{17}$

(5) (1)에서 계산한 a^2+b^2의 값을 이용하면

$$\begin{aligned}a^4+b^4&=(a^2)^2+(b^2)^2=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2\\&=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2=13^2-2\cdot(-2)^2=161\end{aligned}$$

(6) (1), (2)에서 계산한 값을 이용하면

$$a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2)=13\times3\sqrt{17}=39\sqrt{17}$$

| 정답 | (1) 13　(2) $3\sqrt{17}$　(3) 45
(4) $11\sqrt{17}$　(5) 161　(6) $39\sqrt{17}$

돌다리 두드리기

$a+b=5$, $ab=2$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) a^2+b^2　(2) a^3+b^3　(3) a^4+b^4

돌다리 두드리기
| 답 | (1) 21　(2) 95　(3) 433

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=21$
(2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=95$
(3) $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=(a^2+b^2)^2-2(ab)^2=433$

정답 및 풀이 p.488

개념 그대로

유제 06-1

$a+b=4$, $a^3+b^3=28$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) ab (2) a^2+b^2 (3) a^4+b^4

곱셈 공식의 변형을 이용하면 다음과 같이 값을 각각 구할 수 있다.

(1) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$에서 $28=4^3-3ab\cdot 4=64-12ab$이다.
따라서 $ab=3$이다.

(2) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=4^2-2\cdot 3=10$이다.

(3) $(a^2)^2+(b^2)^2=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=10^2-2\cdot 3^2=82$이다.

답 (1) 3 (2) 10 (3) 82

개념 그대로

유제 06-2

$x^2-y^2=1$, $xy=\sqrt{2}$일 때, x^6-y^6의 값을 구하시오.

$x^2-y^2=1$, $xy=\sqrt{2}$이므로 곱셈 공식의 변형을 이용하면 구하는 식의 값은

$$\begin{aligned} x^6-y^6 &= (x^2)^3-(y^2)^3 \\ &= (x^2-y^2)^3+3x^2y^2(x^2-y^2) \\ &= (x^2-y^2)^3+3(xy)^2(x^2-y^2) \\ &= 1^3+3(\sqrt{2})^2\cdot 1=7 \end{aligned}$$

답 7

개념 그대로

유제 06-3

$a-b=4$, $ab=-3$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) a^2+b^2 (2) a^3-b^3 (3) a^4+b^4

곱셈 공식의 변형을 이용하면 다음과 같이 값을 각각 구할 수 있다.

(1) $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=4^2+2\cdot(-3)=10$이다.

(2) $a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)=4^3+3\cdot(-3)\cdot 4=28$이다.

(3) $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=10^2-2\cdot(-3)^2=82$이다.

답 (1) 10 (2) 28 (3) 82

예제 07

$x^2-4x+1=0$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ (2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$ (3) $x^5+\dfrac{1}{x^5}$

길잡이 $x+\dfrac{1}{x}$처럼 역수관계에 있는 경우 역수의 곱은 항상 1이기 때문에 두 수의 합만 주어진다. 또한

$$x+\frac{1}{x}=k \iff x^2-kx+1=0$$

와 같이 다른 형태로 역수관계에 있는 두 수의 합을 표현하기도 한다.

풀 이

(1) $x\neq0$이므로 주어진 식의 양변을 x로 나누면 $x+\dfrac{1}{x}=4$이다.
$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$를 이용하면

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}=4^2-2\cdot1=14$$

(2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$를 이용하면

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=4^3-3\cdot1\cdot4=52$$

(3) 5차항은 이차항과 삼차항의 곱이므로 $\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\dfrac{1}{x^3}\right)$의 전개식

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=x^5+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}=x^5+\frac{1}{x^5}+x+\frac{1}{x}$$

을 변형하면

$$x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=14\cdot52-4=724$$

정답 (1) 14 (2) 52 (3) 724

• 곱셈 공식의 변형 I(p.23)
• 다항식의 곱셈에 대한 성질(p.21)

돌다리 두드리기

$x^2-5x+1=0$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$ (2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$

돌다리 두드리기
|답| (1) 23 (2) 110

$x\neq0$에서 $x+\dfrac{1}{x}=5$이므로
(1) (주어진 식) $=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2=5^2-2=23$
(2) (주어진 식) $=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$
$=5^3+3\cdot5=110$

정답 및 풀이 p.488

개념 그대로

유제 07-1

$x+\frac{1}{x}=6$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\left|x-\frac{1}{x}\right|$ (2) $x^3+\frac{1}{x^3}$ (3) $x^4+\frac{1}{x^4}$

(1) $(a+b)^2=(a-b)^2+4ab$를 이용하면

$$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4\cdot x\cdot\frac{1}{x}=6^2-4=32$$

이다. 제곱근을 구하면 $\left|x-\frac{1}{x}\right|=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$이다.

(2) $a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$를 이용하면

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\frac{1}{x}\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=6^3-3\cdot 6=198$$

(3) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$를 이용하면

$$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\frac{1}{x}=6^2-2=34$$
$$x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2\cdot x^2\cdot\frac{1}{x^2}=34^2-2=1154$$

답 (1) $4\sqrt{2}$ (2) 198 (3) 1154

개념 그대로

유제 07-2

두 수 x, y의 합과 곱이 모두 양수이고 $x^2+y^2=6$, $x^4+y^4=18$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) xy (2) $x+y$ (3) x^3+y^3

(1) $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$에서

$$2x^2y^2=(x^2+y^2)^2-(x^4+y^4)=6^2-18=18$$

이다. $xy>0$이므로 $xy=3$이다.

(2) $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=6+2\cdot 3=12$이고 $x+y>0$ 이므로 $x+y=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$이다.

(3) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$$=(2\sqrt{3})^3-3\cdot 3\cdot 2\sqrt{3}=6\sqrt{3}$$

답 (1) 3 (2) $2\sqrt{3}$ (3) $6\sqrt{3}$

개념 그대로

유제 07-3

$a=1-\sqrt{5}$, $b=1+\sqrt{5}$일 때, $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}$의 값을 구하시오.

a, b에 대하여 $a+b=2$, $ab=-4$이다. 구하려는 식을 통분한 다음 곱셈 공식의 변형을 이용하면

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}=\frac{a^3+b^3}{ab}=\frac{(a+b)^3-3ab(a+b)}{ab}$$
$$=\frac{(a+b)^3}{ab}-3(a+b)=\frac{2^3}{-4}-3\cdot 2=-8$$

답 -8

예제 08

$x+y+z=8,\ x^2+y^2+z^2=30,\ xyz=12$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $xy+yz+zx$ (2) $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$ (3) $x^3+y^3+z^3$

길잡이 세 문자의 곱셈 공식

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$
$$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$$

는 식의 전개에서도 사용하지만

$$a+b+c,\quad ab+bc+ca,\quad a^2+b^2+c^2,\quad abc$$

의 값들 중에서 일부가 주어지고 나머지 값을 계산할 때 많이 사용한다.

풀 이

(1) $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$임을 이용하면

$$\begin{aligned}2(xy+yz+zx)&=(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\\&=8^2-30=34\end{aligned}$$

이므로 $xy+yz+zx=17$이다.

(2) $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2$임을 이용하면

$$\begin{aligned}(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2&=(xy+yz+zx)^2-2(xy\cdot yz+yz\cdot zx+zx\cdot xy)\\&=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)\\&=17^2-2\cdot 12\cdot 8=97\end{aligned}$$

(3) $x^3+y^3+z^3=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$임을 이용하면

$$x^3+y^3+z^3=8\cdot(30-17)+3\cdot 12=140$$

정답 (1) 17 (2) 97 (3) 140

• 곱셈 공식의 변형 II(p.23)

돌다리 두드리기

$x+y+z=7,\ x^2+y^2+z^2=21,\ xyz=8$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) $xy+yz+zx$ (2) $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$ (3) $x^3+y^3+z^3$

(1) $21=7^2-2(xy+yz+zx)$에서 $xy+yz+zx=14$
(2) $14^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2\cdot 8\cdot 7$에서
$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=84$
(3) $x^3+y^3+z^3=7\cdot(21-14)+3\cdot 8=73$

돌다리 두드리기
|답| (1) 14 (2) 84 (3) 73

정답 및 풀이 p.489

개념 그대로

유제 08-1

$a+b+c=8$, $a^2+b^2+c^2=36$, $abc=2$일 때, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$의 값을 구하시오.

구하려는 식을 통분하면

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ca+ab}{abc}=\frac{ab+bc+ca}{abc}$$

이다. 한편 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$에서

$$2(ab+bc+ca)=8^2-36=28 \quad \Rightarrow \quad ab+bc+ca=14$$

이다. 따라서 구하는 값은 $\frac{ab+bc+ca}{abc}=\frac{14}{2}=7$이다.

답 7

개념 그대로

유제 08-2

$a-b=4+\sqrt{2}$, $b-c=4-\sqrt{2}$일 때, $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$의 값을 구하시오.

$a-c=(a-b)+(b-c)=(4+\sqrt{2})+(4-\sqrt{2})=8$이므로

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\\&=\frac{1}{2}\{(4+\sqrt{2})^2+(4-\sqrt{2})^2+(-8)^2\}\\&=\frac{1}{2}\{16+8\sqrt{2}+2+16-8\sqrt{2}+2+64\}\\&=\frac{1}{2}\cdot 100=50\end{aligned}$$

답 50

개념 더하기

유제 08-3

+ 곱셈 공식 II(p.22)

세 수 x, y, z가

$$x+y+z=a,\quad xy+yz+zx=b,\quad xyz=c$$

를 만족한다. $(x+y)(y+z)(z+x)$를 a, b, c를 이용하여 나타내시오.

$x+y+z=a$이므로

$$x+y=a-z,\quad y+z=a-x,\quad z+x=a-y$$

이고 이것을 구하는 식에 대입하여 전개하면

$$\begin{aligned}&(x+y)(y+z)(z+x)=(a-z)(a-x)(a-y)\\&=a^3-(x+y+z)a^2+(xy+yz+zx)a-xyz\end{aligned}$$

이다. 이 식에 조건식의 값을 대입하면

$$\begin{aligned}&a^3-(x+y+z)a^2+(xy+yz+zx)a-xyz\\&=a^3-a\times a^2+ba-c=ab-c\end{aligned}$$

에서 $(x+y)(y+z)(z+x)=ab-c$이다.

답 $ab-c$

01-3 다항식의 나눗셈

다항식의 나눗셈

다항식의 나눗셈에는 (다항식)÷(단항식) 또는 (다항식)÷(다항식)의 꼴이 있다.

(다항식)÷(단항식) 꼴 아래의 두 방법 중 하나의 방법으로 계산한다.

방법 1. 분수의 꼴로 고친 후 다항식의 각 항을 분모에 있는 단항식으로 나눈다.

$$(x^3y^2+4x^2y^3)\div x^2y=\frac{x^3y^2+4x^2y^3}{x^2y}=\frac{x^3y^2}{x^2y}+\frac{4x^2y^3}{x^2y}=xy+4y^2$$

방법 2. 분배법칙과 지수법칙을 이용한다.

$$(x^3y^2+4x^2y^3)\div x^2y=(x^3y^2\div x^2y)+(4x^2y^3\div x^2y)=x^{3-2}y^{2-1}+4\cdot 1\cdot y^{3-1}=xy+4y^2$$

지수법칙 II

실수 $a\,(a\neq 0)$와 자연수 m, n에 대하여 다음이 성립한다.

$$a^m\div a^n=\begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n) \end{cases}$$

보기 1.12 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $(x^2+2xy)\div x$ (2) $(6x^3y+4xy^3)\div 2xy$

(다항식)÷(다항식) 꼴 각 다항식을 **내림차순으로 정리**(p.16)한 후 자연수의 나눗셈과 같은 방법으로 계산한다. 예를 들어, 다항식의 나눗셈 $(2x^3+3x^2-11x-3)\div(x-2)$와 자연수의 나눗셈 $1599\div 7$을 비교하여 보자.

$$\begin{array}{rrrrl}
 & 2x^2 & +7x & +3 & \leftarrow \text{몫} \\ \hline
x-2\,) & 2x^3+3x^2 & -11x & -3 & \\
 & 2x^3-4x^2 & & & :(x-2)\times 2x^2 \\ \hline
 & 7x^2 & -11x & & \\
 & 7x^2 & -14x & & :(x-2)\times 7x \\ \hline
 & & 3x & -3 & \\
 & & 3x & -6 & :(x-2)\times 3 \\ \hline
 & & & 3 & \leftarrow \text{나머지}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
 & 228 \\ \hline
7\,) & 1599 \\
 & 14 \\ \hline
 & 19 \\
 & 14 \\ \hline
 & 59 \\
 & 56 \\ \hline
 & 3
\end{array}$$

$x-2$ 보다 차수가 작아지면 나눗셈이 끝난다.

〈다항식의 나눗셈〉 〈자연수의 나눗셈〉

다항식의 나눗셈은 곱한 식을 적을 때 나누어지는 식의 차수와 같은 줄에 맞추어 적는다. 만약 나누어지는 식에서 어떤 차수의 항이 없는 경우, 없는 항이 차지하는 칸만큼 비우고 적으면 나눗셈을 편리하게 할 수 있다. 예를 들어 나누어지는 식이 $2x^3+3x^2-3$이면, 일차항인 x항이 차지하는 칸만큼 비우고 적는다.

1599를 7로 나눈 몫은 228이고 나머지는 3이므로 $1599=7\times 228+3$으로 나타낼 수 있다. 마찬가지로 다항식 $2x^3+3x^2-11x-3$을 다항식 $x-2$로 나눈 몫은 $2x^2+7x+3$이고 나머지가 3이다. 이 관계식을

$$2x^3+3x^2-11x-3=(x-2)(2x^2+7x+3)+3$$

과 같이 나타낼 수 있다.

보기 정답

1.12 (1) $x+2y$ (2) $3x^2+2y^2$

정 의 상 1.13 **다항식의 나눗셈**

다항식의 나눗셈 두 다항식 A, $B\,(B\neq 0)$에 대하여 $A\div B$는

$$A=BQ+R \qquad (\text{단}, (R\text{의 차수}) < (B\text{의 차수}))$$

을 만족시키는 두 다항식 Q와 R를 구하는 것이다. 이때 다항식 Q를 **몫**, 다항식 R를 **나머지**라 한다. 특히 $R=0$이면 A는 B로 **나누어떨어진다**고 하고 $A=BQ$를 만족시킨다.

보기 1.13 다음 나눗셈을 하여 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $(x^3+x^2-1)\div(x-1)$ (2) $(2x^3-7x-2)\div(x^2+3x+1)$

보기 1.14 다음 조건을 만족시키는 다항식 $P(x)$를 구하시오.

(1) 다항식 $P(x)$를 x^2-5로 나누었을 때의 몫이 $x+2$, 나머지가 3

(2) 다항식 $P(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 몫이 $x-1$, 나머지가 $-2x+5$

한 걸음 더

다항식의 나눗셈의 유일성

자연수의 나눗셈 $17\div 5$를 생각해보자. 계산 결과 몫은 3, 나머지는 2이고 $17=5\times 3+2$와 같이 표현한다. 하지만 17을 표현하는 방법은 다양하다. 예를 들어,

$$17=5\times 1+12=5\times 2+7=5\times 3+2$$

이다. 위 표현식 중에서 나머지가 5보다 작은 자연수인 경우에 해당하는 식을 자연수의 나눗셈이라 한다. 이 경우는 $17=5\times 3+2$ 뿐이다.

마찬가지로 다항식 $(2x^3+3x^2-11x-3)\div(x-2)$를 나타내는 표현식도 몫과 나머지 다항식에 어떠한 조건도 없다면 자연수의 나눗셈처럼 다양하게 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}2x^3+3x^2-11x-3&=(x-2)(2x^2+7x+3)+3\\&=(x-2)(2x^2+7x+2)+x+1\\&=(x-2)(2x^2+7x+1)+2x-1=\cdots\end{aligned}$$

그러나 나눗셈의 정의에는 '$(R$의 차수$)<(B$의 차수$)$'라는 조건이 있으므로 이 조건을 만족하는 표현식은

$$2x^3+3x^2-11x-3=(x-2)(2x^2+7x+3)+3$$

뿐임을 알 수 있다. 이와 같이 두 다항식 A, $B\,(B\neq 0)$에 대하여 $A\div B$에서 $A=BQ+R$의 표현식은 조건 '$(R$의 차수$)<(B$의 차수$)$'에 의하여 유일하게 결정된다.

보기 1.15 다항식 $A=2x^2+5x+3$을 다항식 $B=x+3$으로 나누었을 때의 몫 Q와 나머지 R를 구하여 $A=BQ+R$의 꼴로 표현하시오.

보기 정답

1.13 (1) $Q=x^2+2x+2,\ R=1$
(2) $Q=2x-6,\ R=9x+4$

1.14 (1) x^3+2x^2-5x-7
(2) x^3-2x+4

1.15 $2x^2+5x+3$
$=(x+3)(2x-1)+6$

예제 09

다항식 $A=x^4-x^3+x^2+x$에 대하여

(1) A를 x^3+1로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하시오.

(2) A를 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하시오.

길잡이 다항식 A를 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 관계식

$$A=BQ+R, \qquad (R\text{의 차수}) < (B\text{의 차수}) \qquad \cdots ㉠$$

이 성립한다. 하지만 다항식 A를 Q로 나누었을 때 몫과 나머지는 각각 B와 R라고 말할 수 없다. 만약 '(R의 차수) $\geq$ (Q의 차수)'이면 R를 Q로 나눌 수 있기 때문이다. 이때 몫과 나머지를 각각 Q', R'이라 하면 $R=QQ'+R'$이므로

$$A=Q(B+Q')+R', \qquad (R'\text{의 차수}) < (B\text{의 차수})$$

이다. 즉, A를 Q로 나눈 몫과 나머지는 각각 $B+Q'$, R'이다. 이것은 자연수 34를 7로 나누었을 때에는 몫이 4, 나머지가 6이지만, 반대로 34를 4로 나누었을 때에는 몫이 8, 나머지가 2가 되는 것과 마찬가지이다.
나눗셈 ㉠에서 '(R의 차수) < (Q의 차수)' 조건도 만족한다면 다항식 A를 Q로 나누었을 때의 몫은 B, 나머지는 R가 된다.

다항식의 나눗셈은 $A=BQ+R$와 함께 식이 성립할 조건 (R의 차수) < (B의 차수)도 항상 확인하자.

풀 이

• 다항식의 나눗셈(p.39)

(1) $B=x^3+1$이라 하자. 다항식 A를 B로 나누었을 때의 몫과 나머지를 각각 Q, R라 하면

$$Q=x-1, \quad R=x^2+1$$

이고, 관계식

$$A=BQ+R, \quad (R\text{의 차수}) < (B\text{의 차수})$$

가 성립한다.

$$\begin{array}{r|l}
 & x-1 \\ \hline
x^3+1 & x^4-x^3+x^2+x \\
 & x^4 \qquad\quad +x \\ \hline
 & -x^3+x^2 \\
 & -x^3 \qquad -1 \\ \hline
 & x^2 \quad +1
\end{array}$$

(2) $C=x-1$이라 하자. 다항식 A를 C로 나누었을 때의 몫과 나머지를 각각 Q', R'이라 하면

$$Q'=x^3+x+2, \quad R'=2$$

이고, 관계식

$$A=CQ'+R', \quad (R'\text{의 차수}) < (C\text{의 차수})$$

가 성립한다.

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3 \quad +x+2 \\ \hline
x-1 & x^4-x^3+x^2+x \\
 & x^4-x^3 \\ \hline
 & x^2+x \\
 & x^2-x \\ \hline
 & 2x \\
 & 2x-2 \\ \hline
 & 2
\end{array}$$

정답 (1) 몫: $x-1$, 나머지: x^2+1 (2) 몫: x^3+x+2, 나머지: 2

돌다리 두드리기

다항식 A를 x^2-3x-1로 나누었을 때의 몫이 $x+8$이고 나머지가 $24x+9$일 때, 다항식 A를 구하시오.

돌다리 두드리기

|답| x^3+5x^2-x+1

$A=(x^2-3x-1)(x+8)+(24x+9)=x^3+5x^2-x+1$

정답 및 풀이 p.489

개념 더하기

유제 09-1

+ 다항식의 덧셈과 뺄셈(p.17)

$2x^4-3x^3+x^2-5x-9$를 x^3-x+3으로 나누었을 때의 몫과 나머지의 합을 구하시오.

다항식의 나눗셈을 이용하여 직접 나누면
몫은 $2x-3$이고 나머지는 $3x^2-14x$
이므로 몫과 나머지의 합은

$$(2x-3)+(3x^2-14x)$$
$$=3x^2-12x-3$$

에서 $3x^2-12x-3$이다.

$$\begin{array}{r|l} & 2x \quad -3 \\ x^3-x+3 & 2x^4-3x^3+x^2-5x-9 \\ & 2x^4 \qquad -2x^2+6x \\ \hline & -3x^3+3x^2-11x-9 \\ & -3x^3 \qquad +3x-9 \\ \hline & 3x^2-14x \end{array}$$

답 $3x^2-12x-3$

개념 더하기

유제 09-2

+ 다항식의 곱셈(p.20)
+ 다항식의 덧셈과 뺄셈(p.17)

다항식 A를 $2x+1$로 나누었을 때의 몫은 x^2+2x-1이고 나머지는 4라 할 때, A를 구하시오.

다항식 A를 다항식 B로 나눌 때, 몫이 Q이고 나머지가 R이면 관계식

$$A=BQ+R$$

이 성립한다. 주어진 다항식 A는 $2x+1$로 나누었을 때, 몫이 x^2+2x-1이고 나머지가 4이므로

$$A=(2x+1)(x^2+2x-1)+4$$
$$=2x(x^2+2x-1)+(x^2+2x-1)+4=2x^3+5x^2+3$$

답 $2x^3+5x^2+3$

개념 그대로

유제 09-3

다항식 $A=x^4-2x^2+3x+7$을 다항식 B로 나누었을 때의 몫이 x^2-x+1이고, 나머지가 9일 때, 다항식 B를 구하시오.

다항식 A를 나눗셈으로 나타내면

$$A=x^4-2x^2+3x+7$$
$$=B(x^2-x+1)+9$$

이다. 이때 다항식 B는 다항식 $A=x^4-2x^2+3x+7$을 다항식 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫이다. 따라서 다항식의 나눗셈을 이용하면 $B=x^2+x-2$이다.

$$\begin{array}{r|l} & x^2+x \quad -2 \\ x^2-x+1 & x^4 \qquad -2x^2+3x+7 \\ & x^4-x^3+x^2 \\ \hline & x^3-3x^2+3x \\ & x^3-x^2+x \\ \hline & -2x^2+2x+7 \\ & -2x^2+2x-2 \\ \hline & 9 \end{array}$$

답 x^2+x-2

01-1 다항식의 덧셈과 뺄셈 [1-3]

두 다항식 $A=-3x^3+x^2-4x+2$, $B=x^3+2x^2+x-4$에 대하여 $A+3B$를 구하시오.

다항식의 덧셈(p.17)을 이용하여 $A+3B$를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}A+3B&=(-3x^3+x^2-4x+2)+3(x^3+2x^2+x-4)\\&=(-3+3)x^3+(1+6)x^2+(-4+3)x+(2-12)\\&=7x^2-x-10\end{aligned}$$

답 $7x^2-x-10$

01-2

세 다항식

$$A=x^3-4x^2+1,\ B=2x^2+3x-1,\ C=-x^3+5x-2$$

에 대하여 다항식 $A-B-C=ax^3+bx^2+cx+d$일 때, 상수 a, b, c, d의 합 $a+b+c+d$의 값을 구하시오.

다항식의 뺄셈(p.17)을 하면

$$\begin{aligned}A-B-C&=(x^3-4x^2+1)-(2x^2+3x-1)-(-x^3+5x-2)\\&=x^3-4x^2+1-2x^2-3x+1+x^3-5x+2\\&=(1+1)x^3+(-4-2)x^2+(-3-5)x+(1+1+2)\\&=2x^3-6x^2-8x+4\end{aligned}$$

이다. 따라서 $a=2$, $b=-6$, $c=-8$, $d=4$이므로 구하는 값은

$$a+b+c+d=2+(-6)+(-8)+4=-8$$

답 -8

01-3

두 다항식 $A=a^2+2ab-2b^2$, $B=2a^2-ab+b^2$에 대하여 $A-2(X-B)=3A$가 성립할 때, 다항식 X를 구하시오.

주어진 식 $A-2(X-B)=3A$를 X에 대하여 정리하면

$$2X=-2A+2B \quad \Rightarrow \quad X=-A+B$$

이다. **다항식의 뺄셈(p.17)**을 이용하면

$$\begin{aligned}X=-A+B&=-(a^2+2ab-2b^2)+(2a^2-ab+b^2)\\&=-a^2-2ab+2b^2+2a^2-ab+b^2=a^2-3ab+3b^2\end{aligned}$$

에서 $X=a^2-3ab+3b^2$이다.

답 $a^2-3ab+3b^2$

01-4 다항식의 곱셈과 곱셈 공식 [4-10]

$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)=2^a-1$일 때, a의 값을 구하시오.

주어진 식의 좌변에 $(2-1)=1$을 곱하면

$$(2-1)\times(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)$$

이다. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$의 형태의 **곱셈 공식(p.22)**을 이용하여 다음과 같이 식을 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}&(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\&=(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)\\&=(2^4-1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)=\cdots=2^{32}-1\end{aligned}$$

따라서 $2^a-1=2^{32}-1$이므로 $a=32$이다.

답 32

01-5

x에 대한 다항식 $(2x-3y)^2+(x-2)^3$에서 x^2의 계수를 a, 상수항을 b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.

곱셈 공식(p.22)을 이용하여 $(2x-3y)^2$와 $(x-2)^3$을 전개하면

$$\begin{aligned}(2x-3y)^2&=(2x)^2-2\cdot2x\cdot3y+(3y)^2\\&=4x^2-12xy+9y^2\\(x-2)^3&=x^3-3x^2\cdot2+3x\cdot2^2-2^3\\&=x^3-6x^2+12x-8\end{aligned}$$

이다. 주어진 식은 x에 대한 다항식이므로 x에 대하여 **내림차순으로 정리(p.16)**하면

$$\begin{aligned}(2x-3y)^2+(x-2)^3&=4x^2-12xy+9y^2+x^3-6x^2+12x-8\\&=x^3-2x^2+9y^2-12xy+12x-8\\&=x^3-2x^2+(12-12y)x+9y^2-8\end{aligned}$$

이므로 x^2의 계수는 -2이고 상수항은 $9y^2-8$이다. 따라서 $a=-2$, $b=9y^2-8$이므로 구하는 값은 $a+b=9y^2-10$이다.

답 $9y^2-10$

01-6

$x+y+z=3$, $x^2+y^2+z^2=35$, $xyz=-15$일 때,

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2$$

의 값을 구하시오.

곱셈 공식의 변형(p.23)을 이용하면

$$\begin{aligned}x^2+y^2+z^2&=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\\35&=3^2-2(xy+yz+zx)\end{aligned}$$

이므로 $xy+yz+zx=-13$이다. **곱셈 공식(p.22)**을 이용하면

$$\begin{aligned}(xy+yz+zx)^2&=(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2+2(xy^2z+yz^2x+zx^2y)\\&=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(y+z+x)\end{aligned}$$

이므로 구하는 값은

$$\begin{aligned}x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2&=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)\\&=(-13)^2-2\cdot(-15)\cdot3\\&=169+90=259\end{aligned}$$

답 259

01-7

두 다항식

$$(1+2x+3x^2)^3,\quad (1+2x+3x^2+4x^3)^3$$

의 전개식에서 x^2의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값을 구하시오.

두 다항식의 공통 부분인 $1+2x+3x^2$을 다항식 A라 하면

$$(1+2x+3x^2)^3=A^3,\quad (1+2x+3x^2+4x^3)^3=(A+4x^3)^3$$

이다. 이때, **곱셈 공식(p.22)**에 의하여

$$(A+4x^3)^3=A^3+12A^2x^3+48Ax^6+64x^9$$

인데, $12A^2x^3+48Ax^6+64x^9$에서는 x^2항이 나올 수 없다.
따라서 A^3의 전개식에서 x^2의 **계수(p.14)**를 찾아야 하므로 x^2의 계수 a, b의 값은 같다. 그러므로 $a-b=0$이다.

답 0

01-8

$x=2+\sqrt{3}$, $y=2-\sqrt{3}$일 때, 다음 식의 값을 구하시오.

(1) x^3+y^3　　(2) $\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}$

$x+y$, $x-y$, xy를 각각 구하면

$$x+y=(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$$
$$x-y=(2+\sqrt{3})-(2-\sqrt{3})=2\sqrt{3}$$
$$xy=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=2^2-\sqrt{3}^2=1$$

이다. **곱셈 공식의 변형(p.23)**을 이용하면 구하는 값은 다음과 같다.

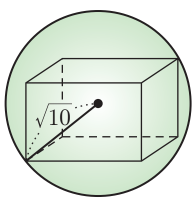
(1) $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=4^3-3\cdot1\cdot4$
$=64-12=52$

(2) $\dfrac{x^2}{y}-\dfrac{y^2}{x}=\dfrac{x^3-y^3}{xy}=\dfrac{(x-y)^3+3xy(x-y)}{xy}$
$=\dfrac{(2\sqrt{3})^3+3\cdot1\cdot2\sqrt{3}}{1}=30\sqrt{3}$

답 (1) 52 (2) $30\sqrt{3}$

01-9

그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$인 구에 겉넓이가 60인 직육면체가 내접하고 있다. 이 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합을 구하시오.



직육면체의 가로, 세로, 높이의 길이를 각각 a, b, c라 하면 직육면체의 대각선의 길이는 구의 지름의 길이와 같으므로

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2}=2\sqrt{10}\quad\Rightarrow\quad a^2+b^2+c^2=40$$

이다. 또한, 직육면체의 겉넓이가 60이므로

$$2(ab+bc+ca)=60$$

이다. 따라서 **곱셈 공식(p.22)**을 이용하면

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$$
$$=40+60=100$$

에서 a, b, c는 길이라 모두 양수이므로 $a+b+c=10$이다. 따라서 직육면체의 모든 모서리의 길이의 합은 $4(a+b+c)=40$이다.

답 40

01-10

두 양수 a, b에 대하여 한 변의 길이가 각각 a, $2b$인 두 개의 정사각형과 가로와 세로의 길이가 각각 a, b이고 넓이가 5인 직사각형이 있다. 두 정사각형의 넓이의 합이 가로와 세로의 길이가 각각 a, b인 직사각형의 넓이의 3배와 같을 때, 한 변의 길이가 $2a+4b$인 정사각형의 넓이를 구하시오.

한 변의 길이가 각각 a, $2b$인 두 정사각형의 넓이의 합은 $a^2+(2b)^2$이고 직사각형의 넓이는 $ab=5$이므로

$$a^2+4b^2=3ab=15$$

이다. 한 변의 길이가 $2a+4b$인 정사각형의 넓이는 **곱셈 공식(p.22)**을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$(2a+4b)^2=4(a+2b)^2=4(a^2+4ab+4b^2)$$
$$=4(a^2+4b^2+4ab)=4(3ab+4ab)$$
$$=4(15+20)\quad(\because ab=5)$$
$$=140$$

답 140

01-11 다항식의 나눗셈 [11-12]

x에 대한 삼차식 x^3+ax+b가 x^2-x+2로 나누어떨어질 때, 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오.

$$\begin{array}{r|l}
 & x+1 \\ \hline
x^2-x+2 & x^3 \qquad\quad +ax+b \\
 & x^3-x^2 \qquad +2x \\ \hline
 & \quad x^2+(a-2)x+b \\
 & \quad x^2 \qquad -x+2 \\ \hline
 & \qquad (a-1)x+b-2
\end{array}$$

다항식의 나눗셈(p.39)을 이용하여 직접 나누면 몫은 $x+1$이고 나머지 $(a-1)x+b-2$가 나누어떨어지므로

$$(a-1)x+(b-2)=0$$

에서 $b=2$이고 $a=1$이다. 따라서 구하는 값은 $a+b=1+2=3$이다.

답 3

01-12

다항식 A를 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 x^2+2x이고 나머지는 5라 할 때, A를 x^2+x-1로 나누었을 때의 몫과 나머지의 합을 구하시오.

다항식 A를 $x+1$로 나누었을 때 몫이 x^2+2x, 나머지가 5이므로 **다항식의 나눗셈(p.39)**을 이용하여 식을 쓰면

$$A=(x+1)(x^2+2x)+5$$

이다. **다항식의 곱셈에 대한 성질(p.21)**을 이용하여 전개하면

$$A=x(x^2+2x)+(x^2+2x)+5=x^3+3x^2+2x+5$$

이다. 다항식 A를 x^2+x-1로 나누면 오른쪽에서 몫이 $x+2$이고 나머지가 $x+7$이다. 따라서 몫과 나머지의 합은

$$(x+2)+(x+7)=2x+9$$

$$\begin{array}{r|l}
 & x \quad +2 \\ \hline
x^2+x-1 & x^3+3x^2+2x+5 \\
 & x^3+x^2-x \\ \hline
 & \quad 2x^2+3x+5 \\
 & \quad 2x^2+2x-2 \\ \hline
 & \qquad\quad x+7
\end{array}$$

답 $2x+9$

01-1

두 다항식 A, B에 대하여 $A\star B=2A-3B$일 때,

$$(2x^2+4x-1)\star(-x^3+x^2-2x-3)$$

를 간단히 하시오.

$A\star B=2A-3B$이므로 **다항식의 뺄셈(p.17)**을 이용하면 주어진 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&2(2x^2+4x-1)-3(-x^3+x^2-2x-3)\\&=(4x^2+8x-2)+(3x^3-3x^2+6x+9)\\&=3x^3+(4-3)x^2+(8+6)x+(9-2)\\&=3x^3+x^2+14x+7\end{aligned}$$

답 $3x^3+x^2+14x+7$

01-2

$a+b=1$, $ab=-3$일 때, $a^4+a^5+b^4+b^5$의 값을 구하시오.

곱셈 공식의 변형(p.23)을 이용하면

$$\begin{aligned}a^2+b^2&=(a+b)^2-2ab\\&=1^2-2\cdot(-3)=7\\a^3+b^3&=(a+b)^3-3ab(a+b)\\&=1^3-3\cdot(-3)\cdot1=10\\a^4+b^4&=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2\\&=7^2-2\cdot(-3)^2=31\end{aligned}$$

에서 $a^4+b^4=31$이다. 또한, a^5+b^5을 구하기 위해 **다항식의 곱셈(p.20)**을 이용하여 $(a^2+b^2)(a^3+b^3)$을 전개하면

$$(a^2+b^2)(a^3+b^3)=a^5+a^2b^3+a^3b^2+b^5$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow\quad a^5+b^5&=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-(ab)^2(a+b)\\&=7\cdot10-(-3)^2\cdot1=61\end{aligned}$$

에서 $a^5+b^5=61$이다. **다항식의 덧셈의 교환법칙(p.17)**에 의하여

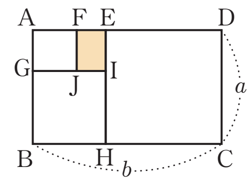
$$a^4+a^5+b^4+b^5=a^4+b^4+a^5+b^5$$

이므로 $31+61=92$이다.

답 92

01-3

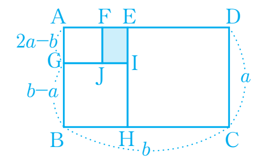
그림과 같이 $\overline{CD}=a$, $\overline{BC}=b$인 직사각형 ABCD가 있다. 세 사각형 AGJF, GBHI, EHCD가 모두 정사각형일 때, 사각형 FJIE의 넓이를 a, b에 대한 식으로 나타내시오. $\left(단,\ \dfrac{3}{2}a<b<2a\right)$



사각형 EHCD가 정사각형이므로 $\overline{CH}=a$이고

$$\overline{BH}=\overline{BG}=b-a$$

$$\overline{AG}=a-(b-a)=2a-b$$



이다. 따라서 사각형 ABCD의 넓이는 ab이고, 사각형 EHCD의 넓이는 a^2, 사각형 GBHI의 넓이는 $(b-a)^2$, 그리고 사각형 AGJF의 넓이는 $(2a-b)^2$이다. 이를 이용하면 사각형 FJIE의 넓이는

$$\begin{aligned}&ab-\{a^2+(b-a)^2+(2a-b)^2\}\\&=ab-(a^2+b^2-2ab+a^2+4a^2-4ab+b^2)\\&=ab-(6a^2+2b^2-6ab)\\&=-6a^2+7ab-2b^2\end{aligned}$$

답 $-6a^2+7ab-2b^2$

01-4

다항식 $P(x)$를 다항식 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지가 $2x+1$일 때, $xP(x)$를 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

다항식 $P(x)$를 다항식 x^2-x+1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고 다항식의 나눗셈으로 나타내면

$$P(x)=(x^2-x+1)Q(x)+(2x+1)$$

이다. 양변에 x를 곱한 후, **다항식의 곱셈에 대한 성질(p.21)**을 이용하여 전개하면

$$\begin{aligned}xP(x)&=x\{(x^2-x+1)Q(x)+(2x+1)\}\\&=x(x^2-x+1)Q(x)+x(2x+1)\\&=(x^2-x+1)xQ(x)+(2x^2+x)\end{aligned}$$

이다. 이때 $(x^2-x+1)xQ(x)$는 x^2-x+1로 나누어떨어지므로 $xP(x)$를 다항식 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지는 다항식 $2x^2+x$를 다항식 x^2-x+1로 나누었을 때의 나머지와 같다. 이때 **다항식의 나눗셈(p.39)**을 이용하면 구하는 나머지는 $3x-2$이다.

$$\begin{array}{r}2\\x^2-x+1\,\overline{)\,2x^2+x\phantom{{}+2}}\\\underline{2x^2-2x+2}\\3x-2\end{array}$$

답 $3x-2$

01-5

세 변의 길이가 a, b, c인 삼각형이

$$(a+b+c)(a-b+c)=(a+b-c)(-a+b+c)$$

를 만족할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 구하시오.

곱셈 공식(p.22)을 이용하여 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned}(a+b+c)(a-b+c)&=\{(a+c)+b\}\{(a+c)-b\}\\&=(a+c)^2-b^2\end{aligned}$$

이고 우변을 정리하면

$$\begin{aligned}(a+b-c)(-a+b+c)&=\{b+(a-c)\}\{b-(a-c)\}\\&=b^2-(a-c)^2\end{aligned}$$

이다. 따라서

$$(a+c)^2-b^2=b^2-(a-c)^2$$

이므로 전개하여 정리하면

$$a^2+2ac+c^2-b^2=b^2-(a^2-2ac+c^2)$$
$$\Rightarrow \quad a^2+c^2=b^2$$

이다. 피타고라스 정리에 의하여 주어진 삼각형은 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다.

답 빗변의 길이가 b인 직각삼각형

01-6

$x=4-2\sqrt{2}$일 때, 다항식 $x^4-8x^3+9x^2-6x+4$의 값을 구하시오.

$x=4-2\sqrt{2}$에서 $x-4=-2\sqrt{2}$이다. 이 식의 양변을 제곱하면

$$(x-4)^2=(-2\sqrt{2})^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2-8x+8=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 이때 **다항식의 나눗셈(p.39)**을 이용하여 다항식 $x^4-8x^3+9x^2-6x+4$를 다항식 x^2-8x+8로 나누면 몫이 x^2+1이고 나머지가 $2x-4$이므로 다항식의 나눗셈으로 나타내면

$$\begin{array}{r}x^2+1\\ x^2-8x+8\overline{)\,x^4-8x^3+9x^2-6x+4}\\ \underline{x^4-8x^3+8x^2}\\ x^2-6x+4\\ \underline{x^2-8x+8}\\ 2x-4\end{array}$$

$$\begin{aligned}&x^4-8x^3+9x^2-6x+4\\&=(x^2-8x+8)(x^2+1)+(2x-4)\end{aligned}$$

이다. ㉠에서 $x^2-8x+8=0$이므로 $x=4-2\sqrt{2}$를 대입하면 다음과 같다.

$$(x^2-8x+8)(x^2+1)+(2x-4)=2x-4=2(4-2\sqrt{2})-4=4-4\sqrt{2}$$

답 $4-4\sqrt{2}$

01-7

수학이는 다항식 A를 나누어야 하는데, 차수를 잘못 보고 $2x^2-x+4$로 나누었더니 몫이 $2x^2-2x+1$이고 나머지가 $x-3$이 나왔다. 다항식 A를 다항식 $2x^3-x+4$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 각각 구하시오.

다항식 A를 나눗셈의 관계식으로 나타내면

$$A=(2x^2-x+4)(2x^2-2x+1)+(x-3)$$

이다. **다항식의 덧셈과 뺄셈(p.17)** 및 **다항식의 곱셈(p.20)**을 이용하여 다항식 A를 구하면

$$\begin{aligned}&(2x^2-x+4)(2x^2-2x+1)+(x-3)\\&=(4x^4-4x^3+2x^2)+(-2x^3+2x^2-x)\\&\quad+(8x^2-8x+4)+(x-3)\\&=4x^4-6x^3+12x^2-8x+1\end{aligned}$$

이다. 다항식 $A=4x^4-6x^3+12x^2-8x+1$를 **다항식의 나눗셈(p.39)**을 이용하여 $2x^3-x+4$로 나누면 몫은 $2x-3$이고 나머지는 $14x^2-19x+13$이다.

$$\begin{array}{r}2x-3\\ 2x^3-x+4\overline{)\,4x^4-6x^3+12x^2-8x+1}\\ \underline{4x^4-2x^2+8x}\\ -6x^3+14x^2-16x+1\\ \underline{-6x^3+3x-12}\\ 14x^2-19x+13\end{array}$$

답 몫: $2x-3$, 나머지: $14x^2-19x+13$

01-8 교육청 기출

3 이상의 자연수 n에 대하여 밑면의 가로의 길이와 세로의 길이가 각각 n^2+3n, $n+1$이고 높이가 n^3+3n^2+2n+2인 직육면체가 있다. 이 직육면체를 한 모서리의 길이가 n인 정육면체로 조각낼 때, 한 모서리의 길이가 n인 정육면체의 최대 개수가 $(n+a)(n+b)(n+c)$라 하자. 자연수 a, b, c에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, $a<b<c$이고 남은 조각을 붙여서 정육면체를 만들 수는 없다.)

직육면체의 밑면의 가로의 길이는

$$n^2+3n=n(n+3)$$

이고 세로의 길이는

$$n+1=n\times1+1$$

이다. 또한 **다항식의 나눗셈(p.39)**을 이용하여 높이 n^3+3n^2+2n+2를 n으로 나누면 몫이 n^2+3n+2이고 나머지가 2이므로

$$n^3+3n^2+2n+2=n(n^2+3n+2)+2$$

와 같이 나타낼 수 있다. 따라서 한 모서리의 길이가 n인 정육면체를 최대

$$(n+3)\times1\times(n^2+3n+2)$$

개 얻을 수 있다. 즉, 구하는 최대 개수는

$$(n+1)(n+2)(n+3)$$

이므로

$$a=1,\quad b=2,\quad c=3$$

이고 구하는 값은 $a+b+c=6$이다.

답 6

02 항등식과 나머지정리

정의 & 포인트 확인

- 등식
- 항등식의 성질 I
- 항등식의 성질 II
- 항등식의 성질 III

- 미정계수법
- 다항식의 나눗셈과 항등식
- 나머지정리
- 인수정리
- 조립제법

02-1 항등식

항등식의 뜻

$x^2=1$과 같이 등호(=)를 써서 두 수 또는 두 식이 같음을 나타낸 식을 등식이라 한다. 등식은 크게 방정식과 항등식으로 구분된다.

등식 $2x-1=3$은 $x=2$일 때에는 참이지만, x가 2가 아닌 다른 값일 때에는 거짓이다. 이와 같이 x의 값에 따라 참일 때도 있고, 거짓일 때도 있는 등식을 x에 대한 방정식이라 한다.

1단원에서 학습한 다항식의 곱셈 공식은 항등식이다.

등식 $(x+1)^2=x^2+2x+1$은 x에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립한다. 이와 같이 x의 값에 상관없이 항상 성립하는 등식을 x에 대한 항등식이라 한다.

정의 상 2.1 등식

- 등호(=)를 써서 두 수 또는 두 식이 같음을 나타낸 식을 **등식**이라 한다.
- 문자의 값에 따라 참이 되기도 하고, 거짓이 되기도 하는 등식을 그 문자에 대한 **방정식**이라 한다.
- 문자의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식을 그 문자에 대한 **항등식**이라 한다.

보기 2.1 다음 등식이 x에 대한 항등식이면 '항', 방정식이면 '방'을 쓰시오.

(1) $3x+2=x-2$ (2) $(x-1)(x+1)=x^2-1$

어떤 등식이 항등식임을 표현하는 방식은 다양하다. 다음 표현은 모두 x에 대한 항등식을 나타낸다.

- x의 값에 상관없이 항상 성립하는 등식
- x의 값에 관계없이 항상 성립하는 등식
- 모든 x에 대하여 성립하는 등식
- 임의의 x에 대하여 성립하는 등식
- x가 어떤 값을 갖더라도 항상 성립하는 등식

보기 정답

2.1 (1) 방 (2) 항

항등식의 성질

실수 a, b에 대하여 등식 $ax+b=0$을 만족시키는 x의 값을 구해보자. $ax+b=0$을 방정식이라 하지 않고 등식이라 한 것은 방정식이 아닌 경우도 있기 때문이다. 실수의 나눗셈은 0으로 나눌 수 없기 때문에 다음과 같이 세 가지 경우가 있다.

- **$a \neq 0$인 경우** $x=-\dfrac{b}{a}$일 때 등식 $ax+b=0$이 참이고 다른 x의 값에 대해서는 등식이 거짓이다. 즉, 등식 $ax+b=0$은 x에 대한 방정식이다.
- **$a=0$, $b=0$인 경우** 등식은 $0\cdot x+0=0$이 되어 x의 값에 상관없이 등식이 성립한다. 즉, 등식 $ax+b=0$은 x에 대한 항등식이다.
- **$a=0$, $b\neq 0$인 경우** 등식은 $0\cdot x+b=0$이 되어 x에 어떤 값을 넣어도 등식이 성립하지 않는다.

따라서 등식이 어떤 문자에 대한 항등식이기 위해서는 특별한 조건이 필요하다는 것을 알 수 있다. 등식이 항등식이기 위한 몇 가지 조건을 찾아보자.

x에 대한 항등식 $ax+b=0$

등식 $ax+b=0$이 x에 대한 항등식이면 x에 어떤 값을 대입해도 성립하므로 $x=0$, $x=1$을 각각 대입해도 등식이 성립한다.

$$x=0\text{을 대입하면} \qquad b=0 \qquad \cdots (2.1.1)$$

$$x=1\text{을 대입하면} \qquad a+b=0 \qquad \cdots (2.1.2)$$

에서 (2.1.1), (2.1.2)를 연립하여 풀면 $a=b=0$이다.

또한 $a=b=0$이면 등식 $ax+b=0$은 $0\cdot x+0=0$이므로 x에 대한 항등식이다.

포인트 상 2.2 **항등식의 성질 I**

- 등식 $ax+b=0$이 x에 대한 항등식이다.
  $\iff a=0,\ b=0$이다.
- 등식 $ax+b=a'x+b'$이 x에 대한 항등식이다.
  $\iff a=a',\ b=b'$이다.

보기 2.2 등식 $a(x-2)-x+b=0$이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

항등식의 성질 I

등식 $ax+b=a'x+b'$이 x에 대한 항등식이라 하자. 우변의 식을 좌변으로 이항하면

$$(a-a')x+(b-b')=0$$

이고, 등식 $ax+b=0$이 x에 대한 항등식일 때의 조건으로부터

$$a-a'=b-b'=0$$

이다. 따라서

$$a=a',\ b=b'$$

이다.

기호 '$\iff$'는 두 개의 문장이나 수식이 서로 같은 의미임을 뜻한다.

보기 정답

2.2 $a=1,\ b=2$

x에 대한 항등식 $ax^2+bx+c=0$

등식 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이면 x에 어떤 값을 대입해도 성립하므로 $x=0$, $x=1$, $x=-1$을 각각 대입해도 등식이 성립한다.

$x=0$을 대입하면 $\quad c=0 \qquad \cdots(2.1.3)$

$x=1$을 대입하면 $\quad a+b+c=0 \qquad \cdots(2.1.4)$

$x=-1$을 대입하면 $\quad a-b+c=0 \qquad \cdots(2.1.5)$

에서 (2.1.3), (2.1.4), (2.1.5)를 연립하여 풀면 $a=b=c=0$이다.

또한 $a=b=c=0$이면 등식 $ax^2+bx+c=0$은 $0\cdot x^2+0\cdot x+0=0$이므로 x에 대한 항등식이다.

항등식의 성질 II

등식 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이라 하자. 우변의 식을 좌변으로 이항하면

$$(a-a')x^2+(b-b')x+(c-c')=0$$

이고, 등식 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식일 때의 조건으로부터

$$a-a'=b-b'=c-c'=0$$

이다. 따라서

$$a=a',\ b=b',\ c=c'$$

이다.

포인트 상 2.3 항등식의 성질 II

- 등식 $ax^2+bx+c=0$이 x에 대한 항등식이다.
  $\Longleftrightarrow$ $a=0$, $b=0$, $c=0$이다.
- 등식 $ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$이 x에 대한 항등식이다.
  $\Longleftrightarrow$ $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$이다.

보기 2.3 등식 $(a-1)x^2+(b+2)x+c-1=0$이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c의 값을 구하시오.

x, y에 대한 항등식 $ax+by+c=0$

등식 $ax+by+c=0$이 x, y에 대한 항등식이면 x와 y에 어떤 값을 대입해도 성립하므로 $(x,\ y)=(0,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$을 각각 대입해도 등식이 성립한다.

$(x,\ y)=(0,\ 0)$을 대입하면 $\quad c=0 \qquad \cdots(2.1.6)$

$(x,\ y)=(1,\ 0)$을 대입하면 $\quad a+c=0 \qquad \cdots(2.1.7)$

$(x,\ y)=(0,\ 1)$을 대입하면 $\quad b+c=0 \qquad \cdots(2.1.8)$

에서 (2.1.6), (2.1.7), (2.1.8)을 연립하여 풀면 $a=b=c=0$이다.

또한 $a=b=c=0$이면 등식 $ax+by+c=0$은 $0\cdot x+0\cdot y+0=0$이므로 x, y에 대한 항등식이다.

항등식의 성질 III

등식 $ax+by+c=a'x+b'y+c'$이 x, y에 대한 항등식이라 하자. 우변의 식을 좌변으로 이항하면

$$(a-a')x+(b-b')y+(c-c')=0$$

이고, 등식 $ax+by+c=0$이 x, y에 대한 항등식일 때의 조건으로부터

$$a-a'=b-b'=c-c'=0$$

이다. 따라서

$$a=a',\ b=b',\ c=c'$$

이다.

보기 정답

2.3 $a=1$, $b=-2$, $c=1$

포인트 상 2.4 **항등식의 성질 III**

- 등식 $ax+by+c=0$이 x, y에 대한 항등식이다.
  $\iff a=0,\ b=0,\ c=0$이다.
- 등식 $ax+by+c=a'x+b'y+c'$이 x, y에 대한 항등식이다.
  $\iff a=a',\ b=b',\ c=c'$이다.

보기 2.4 등식 $ax+2y=3x+by$가 x, y에 대한 항등식일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

한 걸음 더

문자에 따라 달라지는 항등식의 조건

등식 $xy-x+3y-3=0$은 두 문자 x, y를 포함하고 있지만 x, y에 대한 항등식이 아니다. $x=0$, $y=0$을 대입하면 등식이 성립하지 않기 때문이다. 하지만 이 등식은 x에 대한 항등식 혹은 y에 대한 항등식은 될 수 있다.

이제 등식 $xy-x+3y-3=0$이 x와 y에 대한 항등식이 될 조건을 각각 구해보자.

- 등식 $xy-x+3y-3=0$을 x에 대하여 내림차순으로 정리(p.16)하면

$$(y-1)x+3y-3=0$$

이다. 이 등식이 x에 대한 항등식이면 항등식의 성질 I(p.49)에서

$$y-1=0,\quad 3y-3=0$$

이므로 $y=1$이다.

- 등식 $xy-x+3y-3=0$을 y에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(x+3)y-x-3=0$$

이다. 이 등식이 y에 대한 항등식이면 항등식의 성질 I(p.49)에서

$$x+3=0,\quad -x-3=0$$

이므로 $x=-3$이다.

위 예처럼 등식이 주어졌을 때 어떤 문자에 대한 항등식인지 아는 것이 중요하다. 항등식이기 위한 조건이 달라지기 때문이다.

보기 정답

2.4 $a=3,\ b=2$

미정계수법

항등식의 성질을 이용하여 여러 가지 등식이 항등식이 되도록 값이 정해지지 않은 계수와 상수항을 구하는 방법을 미정계수법이라 한다. 미정계수법에는 수치대입법과 계수비교법이 있다.

미정(未定)계수
값이 정해지지 않은 계수를 미정계수라 한다.

수치대입법

수치대입법은 항등식의 문자에 적당한 값을 대입하여 미정계수를 구하는 방법이다. 항등식이 주어진 문자에 임의의 값을 대입하여도 성립한다는 성질을 이용한 방법으로, 구하고자 하는 미정계수의 개수만큼 문자에 적당한 값을 대입하여 연립방정식을 만들어 풀면 된다.

등식 $x^2+ax+b=cx(x-1)$이 x에 대한 항등식이 되도록 수치대입법으로 상수 a, b, c를 구해보자. 미정계수가 세 개이므로 x에 $x=0,\ 1,\ -1$의 값을 대입하여 연립방정식을 풀면

$$b=0,\quad 1+a+b=0,\quad 1-a+b=2c$$

에서 $a=-1$, $b=0$, $c=1$을 얻는다.

계수비교법

계수비교법은 항등식의 양변에 있는 동류항의 계수를 비교하여 미정계수를 구하는 방법이다. 항등식은 양변의 동류항의 계수가 서로 같다는 성질을 이용한 방법으로, 양변의 식을 **내림차순(또는 오름차순)으로 정리**(p.16)한 뒤 계수를 비교하여 연립방정식을 만들어 풀면 된다.

계수와 상수항
x에 대한 일차식 $ax+b$에서 일차항의 계수는 a이고 상수항은 b이다. 상수항 b를 $b=b\times1=b\times x^0$처럼 생각하면 상수항은 x의 0차항이고, b는 0차항의 계수이다. 이런 의미에서 미정계수법은 항등식의 계수뿐만 아니라 상수항도 구하는 것을 내포한다.

등식 $x^2+ax+b=cx(x-1)$이 x에 대한 항등식이 되도록 계수비교법으로 상수 a, b, c를 구해보자. 양변을 x에 대하여 내림차순으로 정리하면 $x^2+ax+b=cx^2-cx$이고, 동류항의 계수를 비교하여 연립방정식을 풀면

$$c=1,\quad a=-c,\quad b=0$$

에서 $a=-1$, $b=0$, $c=1$을 얻는다.

포인트 상 2.5 **미정계수법**

- **수치대입법** 항등식의 문자에 적당한 값을 대입하여 미정계수를 구하는 방법
- **계수비교법** 항등식의 양변에 있는 동류항의 계수를 비교하여 미정계수를 구하는 방법

수치대입법과 계수비교법
미정계수를 구할 때, 동류항끼리 간단히 정리할 수 있으면 계수비교법을 사용하고 차수가 높아 전개가 어렵거나 전개하는 식이 복잡하다면 수치대입법을 주로 사용한다.

보기 2.5 다음 등식이 [ ]안의 문자에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c의 값을 구하시오.

(1) $ax(x-1)+b(x-1)=x^2-1$ $[x]$

(2) $a(x+3)+b(y-1)=x+y+c$ $[x,\ y]$

보기 정답

2.5 (1) $a=1$, $b=1$
(2) $a=1$, $b=1$, $c=2$

다항식의 나눗셈과 항등식

1단원에서 배운 다항식의 나눗셈을 항등식의 성질과 관련지어 생각해보자. 자연수의 나눗셈에서 등식 $7=2\times3+1$은 좌변과 우변이 표현만 다르고 같은 값이므로 항등식이다.

마찬가지로 다항식 A, B에 대하여 A를 B로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 다항식의 나눗셈(p.39)에 의하여 등식 $A=BQ+R$로 표현할 수 있다. 자연수의 나눗셈과 같이 좌변 A와 우변 $BQ+R$는 표현이 다르지만 다항식 $BQ+R$를 전개하여 정리하면 다항식 A와 같으므로 문자의 값에 상관없이 성립하는 항등식이다.

포인트 상 2.6 **다항식의 나눗셈과 항등식**

두 다항식 A, B에 대하여 다항식 A를 다항식 $B\,(B\neq0)$로 나누었을 때의 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$$A=BQ+R$$

와 같이 나타낼 수 있고, 아래의 성질을 만족한다.

- 이 등식은 항등식이다.
- 나머지 R의 차수는 B의 차수보다 작다.
- B의 차수와 Q의 차수를 더하면 A의 차수와 같다.

예시

x에 대한 다항식 x^3+ax+3을 x^2-1로 나누었을 때의 나머지가 $2x+b$일 때, 상수 a, b를 계수비교법과 수치대입법으로 각각 구해보자.

(1) **계수비교법** 삼차식을 이차식으로 나누었으므로 몫은 일차식이므로 $px+q$라 하면

$$x^3+ax+3=(x^2-1)(px+q)+2x+b=px^3+qx^2+(2-p)x+b-q$$

이다. 동류항(p.15)의 계수를 비교하면

$$p=1,\quad q=0,\quad 2-p=a,\quad b-q=3$$

이고, 식을 연립하여 $a=1$, $b=3$, $p=1$, $q=0$을 얻을 수 있다.

(2) **수치대입법** x^3+ax+3을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$x^3+ax+3=(x^2-1)Q(x)+2x+b$$

이다. 미정계수가 두 개이므로 $x=1$, -1을 대입해보자. 이 값을 대입하는 이유는 $x^2-1=0$을 만족시키는 x의 값을 대입하면 $(x^2-1)Q(x)$의 값도 0이 되기 때문이다.

$$x=1\text{을 대입하면}\qquad a+4=b+2$$
$$x=-1\text{을 대입하면}\quad -a+2=b-2$$

이고, 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=3$이다.

보기 2.6 다항식 x^2-ax+2를 다항식 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 2이다. 상수 a의 값과 몫을 구하시오.

보기 정답

2.6 $a=1$, 몫: x

항등식의 성질

예제 01 다음 물음에 답하시오.

(1) 등식 $(2k+3)a-(3k-1)b=8k+1$이 k의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

(2) 등식 $(m^2+m)a+(m-1)b+(m^2-1)c=2$가 m의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 a, b, c의 값을 각각 구하시오.

• 항등식의 성질 I(p.49)
• 다항식의 정리(p.16)

길잡이 주어진 등식이 x에 대한 항등식이면 양변에 있는 동류항의 계수가 서로 같아야 한다.

풀 이

(1) 등식의 좌변을 전개하여 k에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$(2a-3b)k+(3a+b)=8k+1$$

이다. 이 등식이 k에 대한 항등식이므로

$$\begin{cases} 2a-3b=8 & \cdots ㉠ \\ 3a+b=1 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

이 성립한다. ㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-2$이다.

(2) 등식의 좌변을 m에 관하여 내림차순으로 정리하면

$$(a+c)m^2+(a+b)m+(-b-c)=2$$

이다. 이 등식이 m에 대한 항등식이므로

$$\begin{cases} a+c=0 & \cdots ㉢ \\ a+b=0 & \cdots ㉣ \\ -b-c=2 & \cdots ㉤ \end{cases}$$

이 성립한다. ㉢$-$㉣에서 $b=c$임을 알 수 있고, 이를 ㉤에 대입하면

$$-2b=2 \quad \Rightarrow \quad b=c=-1$$

이다. $b=-1$이면 ㉢에서 $a=1$이므로 $a=1$, $b=-1$, $c=-1$이다.

정답 (1) $a=1$, $b=-2$
(2) $a=1$, $b=-1$, $c=-1$

돌다리 두드리기

등식 $a(2x-1)+b(x-3)=x+2$가 x의 값에 관계없이 항상 성립할 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

돌다리 두드리기
|답| $a=1$, $b=-1$

$(2a+b)x+(-a-3b)=x+2$에서 $2a+b=1$, $-a-3b=2$이다. 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-1$이다.

정답 및 풀이 p.493

개념 바꾸기

유제 01-1

− 항등식의 성질 I(p.49)
+ 항등식의 성질 II(p.50)

다음을 구하시오.

(1) 등식 $ax^2-(b-3)x+3=3$이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

(2) 등식 $(a-1)y^2+(b+2)y-1=2y-1$이 y에 대한 항등식일 때, 상수 a, b의 값을 구하시오.

(1) 등식 $ax^2-(b-3)x=0$이 x에 대한 항등식이므로

$$a=0, \quad b-3=0$$

이다. 따라서 $a=0$, $b=3$이다.

(2) 등식 $(a-1)y^2+(b+2)y-1=2y-1$이 y에 대한 항등식이므로

$$a-1=0, \quad b+2=2$$

이다. 따라서 $a=1$, $b=0$이다.

답 (1) $a=0$, $b=3$ (2) $a=1$, $b=0$

개념 바꾸기

유제 01-2

− 항등식의 성질 I(p.49)
+ 항등식의 성질 III(p.51)

등식 $(x+y)a+(2x-y)b=5x-y$가 x, y에 대한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b의 값을 구하시오.

등식의 좌변을 전개하여 x, y에 대하여 정리하면

$$(a+2b)x+(a-b)y=5x-y$$

이다. 이 등식이 x, y에 대한 항등식이므로

$$a+2b=5, \quad a-b=-1$$

이다. 두 식을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=2$이다.

답 $a=1$, $b=2$

개념 바꾸기

유제 01-3

− 항등식의 성질 I(p.49)
+ 항등식의 성질 II(p.50)

등식 $ax^2+bx+cy^2-2=0$이 $2x-y=1$을 만족시키는 모든 실수 x, y에 대하여 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.

$2x-y=1$에서 y를 x에 대한 식으로 표현하면 $y=2x-1$이다. 이 식을
등식 $ax^2+bx+cy^2-2=0$에 대입하여 정리하면

$$\begin{aligned} &ax^2+bx+c(2x-1)^2-2 \\ &=ax^2+bx+4cx^2-4cx+c-2 \\ &=(a+4c)x^2+(b-4c)x+(c-2)=0 \end{aligned}$$

이다. 이 등식이 x에 대한 항등식이므로

$$a+4c=0, \quad b-4c=0, \quad c-2=0$$

에서 $c=2$이고 이를 대입하면 $a=-8$, $b=8$이다. 따라서 구하는 값은

$$a+b+c=-8+8+2=2$$

답 2

미정계수법

예제 02 다음 물음에 답하시오.

(1) 등식 $a(x^2-1)+b(x-1)=5x^2-3x+c$가 x에 대한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b, c의 값을 각각 구하시오.

(2) 다항식 $f(x)$에 대하여 등식 $(x-1)(x+1)f(x)=x^4+ax^2-bx+2$가 x에 대한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

길잡이 항등식의 미정계수는 계수비교법과 수치대입법 중 간편한 방법을 선택하여 계산한다.

- **계수비교법** 항등식에 있는 모든 항의 전개가 어렵지 않은 경우
- **수치대입법** 항등식의 전개가 복잡하거나 다항식이 구체적으로 주어지지 않고 $P(x)$, $Q(x)$와 같이 함수 형태로 주어져 전개가 불가능한 경우

수치대입은 항등식이므로 임의의 값을 대입하여도 상관없다. 하지만 복잡한 식이나 전개가 불가능한 함수의 값을 계산하지 않아도 되는 값을 대입하는 것이 좋다.
예를 들어, (2)에서 $(x-1)(x+1)=0$을 만족하는 x의 값을 대입하면 $f(x)$의 값을 알지 못해도 $(x-1)(x+1)f(x)$의 값이 0이 되므로 계산이 간편해진다.

- 미정계수법(p.52)
- 다항식의 정리(p.16)

풀이

(1) 등식의 좌변을 전개한 후 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$$ax^2+bx-a-b=5x^2-3x+c$$

이다. 이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$a=5,\quad b=-3,\quad -a-b=c$$

이고 a, b의 값을 대입하면 $c=-2$이다. 따라서 구하는 값은 $a=5$, $b=-3$, $c=-2$이다.

(2) 주어진 등식은 x에 대한 항등식이므로 x에 임의의 값을 대입하여도 성립한다. 따라서 $(x-1)(x+1)=0$이 되는 x의 값을 대입하면 상수 a, b사이의 관계를 쉽게 알 수 있다.
먼저 양변에 $x=1$을 대입하면

$$0=1+a-b+2 \quad \Rightarrow \quad a-b+3=0 \qquad \cdots ㉠$$

이다. 다시 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$0=1+a+b+2 \quad \Rightarrow \quad a+b+3=0 \qquad \cdots ㉡$$

이다. ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=0$이다.

정답 (1) $a=5$, $b=-3$, $c=-2$
(2) $a=-3$, $b=0$

돌다리 두드리기

등식 $a(x^2+1)+b(x+1)=3x^2+x+c$가 x에 대한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b, c의 값을 각각 구하시오.

돌다리 두드리기
|답| $a=3$, $b=1$, $c=4$

$ax^2+bx+a+b=3x^2+x+c$에서 $a=3$, $b=1$, $c=4$이다.

정답 및 풀이 p.493

개념 그대로

유제 02-1

다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c의 값을 각각 구하시오.

(1) $x^3+ax^2-x+3=(x+1)(x^2+bx+c)$

(2) $x^3-2x^2+x+5=(x-1)^3+a(x-1)^2+b(x-1)+c$

(1) 등식의 우변을 전개하여 정리하면

$$x^3+ax^2-x+3=x^3+(b+1)x^2+(b+c)x+c$$

이고 이 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$a=b+1,\quad -1=b+c,\quad 3=c$$

이다. 연립방정식을 풀면 $a=-3$, $b=-4$, $c=3$이다.

(2) 등식의 양변에 $x=0$, 1, 2를 대입하면

$x=0$을 대입 $a-b+c=6$ $\cdots$ ㉠

$x=1$을 대입 $c=5$ $\cdots$ ㉡

$x=2$를 대입 $a+b+c=6$ $\cdots$ ㉢

이다. ㉠, ㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=1$, $b=0$, $c=5$이다.

답 (1) $a=-3$, $b=-4$, $c=3$
(2) $a=1$, $b=0$, $c=5$

개념 그대로

유제 02-2

다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c의 값을 각각 구하시오.

(1) $4x^2-3x+7=ax(x-1)+b(x-1)(x+1)+cx(x+1)$

(2) $4x^2-2x+3=a(x-1)(x+1)+b(x-1)+c$

(1) 등식의 양변에 $x=-1$, 0, 1을 대입하면

$x=-1$을 대입 $2a=14$ $\cdots$ ㉠

$x=0$을 대입 $-b=7$ $\cdots$ ㉡

$x=1$을 대입 $2c=8$ $\cdots$ ㉢

이다. ㉠, ㉡, ㉢에 의하여 $a=7$, $b=-7$, $c=4$이다.

(2) 우선 최고차항의 계수를 비교하면 $a=4$이다. 양변에 $x=-1$, 1을 대입하면

$x=-1$을 대입 $-2b+c=9$ $\cdots$ ㉣

$x=1$을 대입 $c=5$ $\cdots$ ㉤

이다. 따라서 ㉣, ㉤에 의하여 $a=4$, $b=-2$, $c=5$이다.

답 (1) $a=7$, $b=-7$, $c=4$
(2) $a=4$, $b=-2$, $c=5$

개념 그대로

유제 02-3

다항식 $f(x)$에 대하여 등식 $(x+1)(x^2-3)f(x)=x^6+ax^4+bx^2+3$이 x에 대한 항등식이 되도록 하는 상수 a, b의 값을 구하시오.

양변에 $x=-1$을 대입하면

$$0=1+a+b+3 \quad\Rightarrow\quad a+b=-4 \qquad \cdots ㉠$$

이고 양변에 $x^2=3$을 대입하면

$$0=3^3+a\cdot 3^2+b\cdot 3+3 \quad\Rightarrow\quad 9a+3b=-30 \qquad \cdots ㉡$$

이다. ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=-1$이다.

답 $a=-3$, $b=-1$

예제 03

다항식 $x^4-5x^3+ax^2-3x+b$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 나머지가 $4x+1$일 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

길잡이 다항식 A를 B로 나눈 몫을 Q, 나머지를 R라 하면

$$A=BQ+R \qquad (R\text{의 차수}) < (B\text{의 차수})$$

이고, 나눗셈은 그 자체로 항등식이다. 미정계수를 구할 때,
직접 나눗셈을 하기 어려운 경우 수치대입법을 사용하면 좋다.

풀 이

1 • 다항식의 나눗셈과 항등식(p.53)

1단계 주어진 식을 다항식의 나눗셈의 꼴로 나타낸다.

$P(x)=x^4-5x^3+ax^2-3x+b$라 두고 다항식 $P(x)$를 x^2-3x+2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하자. 다항식의 나눗셈의 꼴로 나타내면

$$P(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+(4x+1)$$

이다. 이때, 다항식 x^2-3x+2는 $(x-1)(x-2)$로 인수분해되므로

$$P(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+(4x+1)$$

로 표현할 수 있다.

2 • 미정계수법(p.52)

2단계 $(x-1)(x-2)=0$을 만족하는 x의 값을 대입하여 미정계수를 구한다.

이 식은 x에 대한 항등식이므로 수치대입법을 이용하자. $x=1$ 또는 $x=2$이면 $(x-1)(x-2)Q(x)$의 값이 0이므로 양변에 $x=1$ 또는 $x=2$를 대입하자.

$x=1$을 대입 $P(1)=5 \Rightarrow a+b=12$ $\cdots$ ㉠

$x=2$을 대입 $P(2)=9 \Rightarrow 4a+b=39$ $\cdots$ ㉡

이다. ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=9$, $b=3$이다.

정답 $a=9$, $b=3$

돌다리 두드리기

다항식 x^3+ax^2+3x+2를 일차식 $x-1$로 나눈 나머지가 2일 때, a의 값을 구하시오.

돌다리 두드리기
|답| -4

$x^3+ax^2+3x+2=(x-1)Q(x)+2$의 양변에 $x=1$을 대입하면
$1+a+3+2=2 \Rightarrow a=-4$

정답 및 풀이 p.494

개념 더하기

유제 03-1

+ 다항식의 곱셈(p.20)
+ 다항식의 덧셈과 뺄셈(p.17)

다항식 $P(x)=3x^3-2x^2+1$을 다항식 x^2+4로 나누었을 때의 몫이 $3x-2$일 때, 나머지를 구하시오.

다항식 $P(x)$를 다항식 x^2+4로 나누었을 때 나머지를 $R(x)$라 하면

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^2+4)(3x-2)+R(x)\\&=3x^3-2x^2+12x-8+R(x)\end{aligned}$$

이다. 따라서 $R(x)$는

$$\begin{aligned}R(x)&=P(x)-(3x^3-2x^2+12x-8)\\&=-12x+9\end{aligned}$$

답 $-12x+9$

개념 더하기

유제 03-2

+ 다항식의 정리(p.16)

다항식 $P(x)=x^3+ax+b$가 다항식 x^2-x+4로 나누어떨어질 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

삼차식 $P(x)$가 이차식 x^2-x+4로 나누어떨어지므로 나머지는 0이고, 몫 $Q(x)$는 일차식이다. 이때 $P(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $Q(x)=x+c$ (단, c는 상수)의 꼴이다. 따라서

$$P(x)=(x^2-x+4)(x+c)$$

이다. 우변을 전개하여 내림차순으로 정리하면

$$x^3+ax+b=x^3+(c-1)x^2+(4-c)x+4c$$

이다. 양변의 동류항의 계수를 비교하면

$$0=c-1,\quad a=4-c,\quad b=4c$$

이므로 연립하여 풀면 $a=3$, $b=4$, $c=1$이다.

답 $a=3$, $b=4$

개념 더하기

유제 03-3

+ 다항식의 정리(p.16)
+ 다항식의 곱셈(p.20)

다항식 x^4+3x^2+x+1을 다항식 $f(x)$로 나누었을 때의 몫이 x^2-x+3이고 나머지가 $-x-2$일 때, $f(x)$를 구하시오.

사차식을 다항식 $f(x)$로 나눈 몫이 이차식이므로 $f(x)$는 이차식이고, 다항식 x^4+3x^2+x+1의 최고차항의 계수가 1이므로 $f(x)=x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)로 놓을 수 있다. 다항식의 나눗셈으로 나타내면

$$\begin{aligned}&x^4+3x^2+x+1\\&=f(x)(x^2-x+3)-x-2\\&=x^4+(a-1)x^3+(3-a+b)x^2+(3a-b-1)x+3b-2\end{aligned}$$

이다. 등식이 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$$0=a-1,\quad 3=3-a+b,\quad 1=3a-b-1,\quad 1=3b-2$$

이다. 연립하여 풀면 $a=1$, $b=1$이므로 $f(x)=x^2+x+1$이다.

답 x^2+x+1

02-2 나머지정리와 인수정리

나머지정리

다항식의 나눗셈(p.39)에서 다항식을 일차식으로 나눌 때의 나머지는 일차식보다 차수가 낮은 상수이다. 항등식의 성질을 이용하면 다항식의 나눗셈을 이용하여 몫과 나머지를 직접 구하지 않고도 나머지를 쉽게 구할 수 있다.

x에 대한 다항식을 대개 $P(x)$로 나타낸다. P는 다항식을 나타내는 영어 Polynomial의 첫 글자이다.

다항식 $P(x)=3x^3-8x^2+5x+1$을 일차식 $x-2$로 나누었을 때의 몫은 $3x^2-2x+1$이고 나머지는 3이다. 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$P(x)=(x-2)(3x^2-2x+1)+3$$

다항식의 나눗셈을 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r} 3x^2-2x\ +1 \\ x-2\,\overline{)\,3x^3-8x^2+5x+1} \\ \underline{3x^3-6x^2} \\ -2x^2+5x \\ \underline{-2x^2+4x} \\ x+1 \\ \underline{x-2} \\ 3 \end{array}$$

이 등식은 다항식의 나눗셈과 항등식(p.53)에 의하여 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=2$를 대입하면 $P(2)=3$을 얻는다. 즉, 다항식 $P(x)$를 $x-2$로 직접 나누지 않아도 나머지가 $P(2)$임을 쉽게 알 수 있다.

일반적으로 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$$

로 나타낼 수 있다. 이 등식은 x에 대한 항등식이고 $x=\alpha$를 대입하면

$$P(\alpha)=(\alpha-\alpha)Q(\alpha)+R=0\cdot Q(\alpha)+R=R$$

이므로 $R=P(\alpha)$이다. 즉, 다항식 $P(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지는 $P(\alpha)$이다.

이제 다항식 $P(x)$를 일차식 $ax+b\ (a\neq 0)$으로 나누는 경우에 대하여 생각해보자.
다항식 $P(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$P(x)=(ax+b)Q(x)+R$$

로 나타낼 수 있다. 이 등식은 x에 대한 항등식이고 $x=-\dfrac{b}{a}$를 대입하면

$$P\left(-\frac{b}{a}\right)=\left\{a\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right\}Q\left(-\frac{b}{a}\right)+R=0\cdot Q\left(-\frac{b}{a}\right)+R=R$$

이므로 $R=P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$이다. 이와 같이 항등식의 성질을 이용하여 다항식을 일차식으로 나누었을 때의 나머지를 구하는 방법을 나머지정리라 한다.

포인트 상 2.7 **나머지정리**

- 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면 $R=P(\alpha)$이다.
- 다항식 $P(x)$를 일차식 $ax+b$ $(a\neq 0)$으로 나누었을 때의 나머지를 R라 하면 $R=P\left(-\frac{b}{a}\right)$이다.

예시 다항식 $P(x)=x^2-3x$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $P(1)=-2$이고, $2x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $P\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{4}$이다.

보기 2.7 다항식 $2x^3+x-2$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

인수정리

다항식 $P(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 **다항식의 나눗셈(p.39)**에 의하여 나머지가 0이므로

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x)+0=(x-\alpha)Q(x)$$

로 표현할 수 있다. 이 등식은 x에 대한 항등식이므로 $x=\alpha$를 대입하면

$$P(\alpha)=0\cdot Q(\alpha)=0$$

이다. 즉, 다항식 $P(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면 $P(\alpha)=0$이다. 반대로 다항식 $P(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x)+R$$

이고 이 등식에 $x=\alpha$를 대입하면

$$P(\alpha)=(\alpha-\alpha)Q(\alpha)+R=0\cdot Q(\alpha)+R=R$$

다. 이때 $P(\alpha)=0$이면 $R=0$이므로

$$P(x)=(x-\alpha)Q(x)$$

이다. 따라서 $P(\alpha)=0$이면 다항식 $P(x)$는 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.

포인트 상 2.8 **인수정리**

x에 대한 다항식 $P(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다. $\Longleftrightarrow$ $P(\alpha)=0$

예시 다항식 $P(x)=x^3+x^2+x-3$에서 $P(1)=1+1+1-3=0$이므로 $P(x)$는 $x-1$로 나누어떨어진다.

보기 2.8 다항식 x^3+x^2-kx+2가 $x-1$로 나누어떨어지도록 하는 상수 k의 값을 구하시오.

나머지정리의 한계

나머지정리는 다음과 같은 한계가 있다.

- 일차식으로 나눌 때만 사용할 수 있다.
- 몫은 구할 수 없다.

따라서 이차식 이상으로 나누거나 몫을 구하려면 직접 다항식의 나눗셈을 해야 한다.

자연수는 그 자연수의 약수의 곱으로 나타낼 수 있다. 이때 곱해지는 수들을 인수라 한다. 특히 그 중 소수인 것은 소인수라 한다. 이와 마찬가지로 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타낼 때 곱해지는 것들을 그 다항식의 인수라 한다. 다항식 $f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지면

$$f(x)=(x-\alpha)Q(x)$$

이므로 $x-\alpha$는 $f(x)$의 인수이다.

인수정리의 다른 표현들

다음 표현은 다항식 $P(x)$에 대하여 $P(\alpha)=0$을 나타낸다.

- $P(x)$가 $x-\alpha$로 나누어떨어진다.
- $x-\alpha$가 $P(x)$의 인수이다.
- 다항식 $Q(x)$에 대하여 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$이다.

보기 정답

2.7 1

2.8 4

조립제법

조립제법은 다항식의 계수만을 이용하여 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 간단히 구할 수 있는 방법이다.

예를 들어, $3x^3-8x^2+5x+1$을 $x-2$로 나누었을 때의 몫은 $3x^2-2x+1$이고 나머지는 3이다. 이것을 다항식의 나눗셈으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{rl}
 & 3x^2-2x+1 \quad \longleftarrow \text{몫} \\ \cline{2-2}
x-2 \big) & 3x^3-8x^2+5x+1 \\
 & 3x^3-6x^2 \\ \cline{2-2}
 & \quad -2x^2+5x \\
 & \quad -2x^2+4x \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad x+1 \\
 & \qquad\qquad x-2 \\ \cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad 3 \quad \longleftarrow \text{나머지}
\end{array}$$

3 (x^2의 계수)

$-8+2\times3=-2$ (x의 계수)

$5+2\times(-2)=1$ (상수항)

$1+2\times1=3$

이번에는 조립제법을 이용하여 몫과 나머지를 구해보자.

1단계: 오른쪽과 같이 다항식의 계수를 내림차순으로 쓰고 $x-2=0$이 되는 x의 값을 그림과 같은 위치에 쓴다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 3 & -8 & 5 & 1 \\
 & & & & \\ \hline
 & & & &
\end{array}$$

2단계: 첫번째 계수 3을 내려서 그대로 쓰고, 내려쓴 숫자 3과 일차식을 0으로 만드는 값인 2를 곱한 값 6을 ↗ 방향으로 다음 차수의 계수 아래에 쓰고 ↓방향으로 더해서 아래 칸에 쓴다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 3 & -8 & 5 & 1 \\
 & & +6 & & \\ \hline
 & 3 & -2 & &
\end{array}$$

3단계: 이 과정을 반복하여 마지막까지 계산한다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 3 & -8 & 5 & 1 \\
 & & 6 & -4 & 2 \\ \hline
 & 3 & -2 & 1 & 3
\end{array}$$

4단계: 마지막 계산의 결과인 3이 나머지이며, 이를 제외한 3, -2, 1은 각각 몫의 x^2항, x항, 상수항의 계수가 된다.

$$\begin{array}{r|rrr|r}
2 & 3 & -8 & 5 & 1 \\
 & & 6 & -4 & 2 \\ \hline
 & 3 & -2 & 1 & 3
\end{array}$$

즉, 조립제법을 이용해도 다항식 $3x^3-8x^2+5x+1$을 일차식 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 $3x^2-2x+1$이고 나머지는 3임을 알 수 있다.

조립제법은 일차항의 계수가 1인 일차식으로 나눌때만 이용할 수 있으나 약간의 계산을 더하면 $ax+b\,(a\neq 0)$ 꼴의 일차식으로 나눌 때에도 몫과 나머지를 쉽게 구할 수 있다.

다항식 $2x^2-3x+2$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구해보자. 먼저 다항식의 나눗셈을 직접 계산하면 몫은 $x-1$이고 나머지는 1이므로

$$2x^2-3x+2=(2x-1)(x-1)+1$$

이다. 이번에는 조립제법을 이용해보자. 식 $2x-1$이 0이 되는 x의 값은 $\frac{1}{2}$이므로 $2x^2-3x+2$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때로 가정하여 조립제법을 시행하면

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{1}{2} & 2 & -3 & 2 \\ & & 1 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & \boxed{1} \end{array}$$

이다. 즉, 다항식 $2x^2-3x+2$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $2x-2$이고 나머지는 1이므로 $2x^2-3x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x-2)+1$이다. 이때,

$$\begin{aligned} 2x^2-3x+2&=\left(x-\frac{1}{2}\right)(2x-2)+1 \\ &=2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)+1=(2x-1)(x-1)+1 \end{aligned}$$

이므로 다항식 $2x^2-3x+2$를 $2x-1$로 나누었을 때의 몫은 $x-1$이고 나머지는 1임을 알 수 있다. 이것은 다항식의 나눗셈을 한 결과와 같다.

일반적으로 다항식 $P(x)$를 $x+\frac{b}{a}\,(a\neq 0)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면

$$P(x)=\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R=(ax+b)\times\frac{1}{a}Q(x)+R$$

이므로 다항식 $P(x)$를 $ax+b$로 나누었을 때의 몫은 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 몫의 $\frac{1}{a}$배이고 나머지는 $x+\frac{b}{a}$로 나누었을 때의 나머지와 같다.

포인트 상 2.9 **조립제법**

- 조립제법은 다항식 $P(x)$를 최고차항의 계수가 1인 일차식으로 나눌 때 계수만을 이용하여 몫과 나머지를 구하는 방법이다.
- 다항식 $P(x)$를 일차식 $x+\frac{b}{a}\,(a\neq 0)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면 다항식 $P(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때의 몫은 $\frac{1}{a}Q(x)$, 나머지는 R이다.

보기 2.9 다항식 $P(x)$를 $3x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 할 때, $P(x)$를 $x-\frac{1}{3}$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하시오.

보기 정답

2.9 몫: $3Q(x)$, 나머지: R

예제 04 다음 물음에 답하시오.

(1) 다항식 x^3+ax^2-4x+5를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지와 $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 같다. 이때 나머지를 구하시오.

(2) 다항식 x^3+ax^2+bx-6은 $x-2$로 나누어떨어지고, $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 -3이다. 이때 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

길잡이 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때, 나머지만을 구하는 문제는 나머지정리를 사용하면 된다. 즉,

다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때 나머지는 $P(\alpha)$

이다. 또한 $P(\alpha)=0$인 경우 다항식 $P(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지고, 이때 $x-\alpha$가 $P(x)$의 인수이다.

풀 이

- 인수정리(p.61)
- 나머지정리(p.61)

(1) $P(x)=x^3+ax^2-4x+5$라 하자. 다항식 $P(x)$를 일차식 $x+1$로 나누었을 때의 나머지 $P(-1)$와 일차식 $x-2$로 나누었을 때의 나머지 $P(2)$는 각각

$$P(-1)=(-1)^3+a\cdot(-1)^2-4\cdot(-1)+5=a+8$$
$$P(2)=2^3+a\cdot2^2-4\cdot2+5=4a+5$$

이다. 또한 문제의 조건으로부터 $P(-1)=P(2)$이므로 $a+8=4a+5$이다. 즉 $a=1$이고, 구하는 나머지는 $P(-1)=P(2)=9$이다.

(2) $P(x)=x^3+ax^2+bx-6$이라 하자. 다항식 $P(x)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로 $P(2)=0$이고, $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 -3이므로 $P(-1)=-3$이다. 즉

$$\begin{aligned}P(2)&=2^3+a\cdot2^2+b\cdot2-6\\&=4a+2b+2=0 \quad\Rightarrow\quad 2a+b=-1 \qquad\cdots㉠\\P(-1)&=(-1)^3+a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)-6\\&=a-b-7=-3 \quad\Rightarrow\quad a-b=4 \qquad\cdots㉡\end{aligned}$$

이다. ㉠, ㉡를 연립하여 풀면 $a=1$, $b=-3$이다.

정답 (1) 9 (2) $a=1$, $b=-3$

돌다리 두드리기

다항식 $P(x)=3x^3-x^2+4x+5$를 다음 식으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

(1) x (2) $x-1$

(1) $P(0)=5$ (2) $P(1)=11$

돌다리 두드리기

답 (1) 5 (2) 11

개념 줄이기

유제 04-1

– 인수정리(p.61)

다항식 $P(x)=x^3-5x^2+3x+2$를 다음 식으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

(1) $x+1$　　(2) $x-4$　　(3) $2x-1$

(1) 다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 $P(-1)$이므로

$$P(-1)=(-1)^3-5\cdot(-1)^2+3\cdot(-1)+2=-7$$

에서 나머지는 -7이다.

(2) 다항식 $P(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지는 $P(4)$이므로

$$P(4)=4^3-5\cdot4^2+3\cdot4+2=-2$$

에서 나머지는 -2이다.

(3) 다항식 $P(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $P\left(\frac{1}{2}\right)$이므로

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)+2=\frac{19}{8}$$

에서 나머지는 $\frac{19}{8}$이다.

답 (1) -7　(2) -2　(3) $\frac{19}{8}$

개념 줄이기

유제 04-2

– 나머지정리(p.61)

다항식 $P(x)=2x^3+ax^2-4$가 다음 식으로 나누어떨어질 때, 상수 a의 값을 구하시오.

(1) $x-1$　　(2) $x+2$　　(3) $2x-1$

(1) 다항식 $P(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지면 $P(1)=0$이므로

$$P(1)=2\cdot1^3+a\cdot1^2-4=a-2=0$$

에서 $a=2$이다.

(2) 다항식 $P(x)$가 $x+2$로 나누어떨어지면 $P(-2)=0$이므로

$$P(-2)=2\cdot(-2)^3+a\cdot(-2)^2-4=4a-20=0$$

에서 $a=5$이다.

(3) 다항식 $P(x)$가 $2x-1$로 나누어떨어지면 $P\left(\frac{1}{2}\right)=0$이므로

$$P\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+a\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-4=\frac{a}{4}-\frac{15}{4}=0$$

에서 $a=15$이다.

답 (1) 2　(2) 5　(3) 15

개념 그대로

유제 04-3

다항식 $P(x)=x^3-x^2+ax+b$가 $x+2$와 $x-1$을 각각 인수로 가질 때, 다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지를 구하시오.

다항식 $P(x)$가 $x+2$, $x-1$을 인수로 가지므로 $P(-2)=0$이고 $P(1)=0$이다.

$$P(-2)=(-2)^3-(-2)^2+a\cdot(-2)+b$$
$$=-2a+b-12=0 \quad\Rightarrow\quad 2a-b=-12 \qquad \cdots ㉠$$
$$P(1)=1^3-1^2+a\cdot1+b$$
$$=a+b=0 \quad\Rightarrow\quad a+b=0 \qquad \cdots ㉡$$

이다. ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=4$이므로 $P(x)=x^3-x^2-4x+4$이다.
따라서 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는

$$P(-1)=(-1)^3-(-1)^2-4\cdot(-1)+4=6$$

답 6

나머지정리와 인수정리의 응용 1

예제 05

다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 -2이고, $x-3$으로 나누었을 때의 나머지는 6이다. 이때, 다항식 $P(x)$를 $(x+1)(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

길잡이 다항식 $P(x)$를 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리로 바로 구할 수 없다. 하지만 이차식이 $(x-\alpha)(x-\beta)$ 꼴로 인수분해되면 나머지정리를 반복적으로 적용하여 나머지를 구할 수 있다.

$P(x)$를 $(x-\alpha)(x-\beta)$로 나누었을 때 나머지는 일차식 이하이고 몫을 $Q(x)$라 하면

$$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)Q(x)+ax+b$$

이다. 이때 나머지정리를 이용하면 a, b에 대한 연립방정식

$$P(\alpha)=a\alpha+b, \qquad P(\beta)=a\beta+b$$

가 만들어지고, 이것을 풀어 a, b의 값을 구하면 나머지를 알 수 있다.

풀 이

1단계 다항식 $P(x)$를 이차식으로 나누었을 때의 나머지는 일차식 이하이므로 $ax+b$라 하고 $P(x)$를 다항식의 나눗셈으로 나타낸다.

다항식 $P(x)$를 $(x+1)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 놓으면

$$P(x)=(x+1)(x-3)Q(x)+(ax+b)$$

와 같이 나타낼 수 있다.

2단계 나머지정리를 이용하여 미지수를 구한다.

이때, 나머지정리에 의하여 $P(-1)=-2$, $P(3)=6$이므로 각각 대입하면

$$P(-1)=-a+b=-2 \quad \Rightarrow \quad a-b=2 \qquad \cdots ㉠$$
$$P(3)=3a+b=6 \quad \Rightarrow \quad 3a+b=6 \qquad \cdots ㉡$$

이다. ㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=0$이므로 다항식 $P(x)$를 $(x+1)(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지는 $2x$이다.

정답 $2x$

1 • 다항식의 나눗셈과 항등식(p.53)

2 • 나머지정리(p.61)

돌다리 두드리기

다항식 x^3-2x^2+ax+b를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 1이고 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 3일 때, 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

돌다리 두드리기

|답| $a=-2$, $b=4$

$P(x)=x^3-2x^2+ax+b$라 할 때,
$P(1)=-1+a+b=1 \quad \Rightarrow \quad a+b=2$
$P(-1)=-3-a+b=3 \quad \Rightarrow \quad a-b=-6$
이므로 a, b에 대한 두 식을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=4$이다.

정답 및 풀이 p.495

개념 그대로

유제 05-1

다항식 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$, 나머지는 3이다. $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 1일 때, 다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

다항식 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$, 나머지는 3이므로

$$P(x)=(x+2)Q(x)+3$$

으로 나타낼 수 있다. 또한 몫인 $Q(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 1이므로 나머지정리에 의하여 $Q(-1)=1$이다. 다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $P(-1)$이므로 구하는 나머지는 다음과 같다.

$$P(-1)=(-1+2)Q(-1)+3=1+3=4$$

답 4

개념 그대로

유제 05-2

다항식 $P(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 나머지가 $-x+3$일 때, $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

다항식 $P(x)$를 x^2+x-2로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^2+x-2)Q(x)-x+3\\&=(x-1)(x+2)Q(x)-x+3\end{aligned}$$

으로 나타낼 수 있다. 다항식 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $P(-2)$이므로 구하는 나머지는 다음과 같다.

$$P(-2)=0-(-2)+3=5$$

답 5

개념 그대로

유제 05-3

다항식 $P(x)$를 x와 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 각각 2와 3일 때, $(x+1)P(x)$를 $x(x-1)$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

$(x+1)P(x)$를 $x(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$ (단, a, b는 상수)라 하면

$$(x+1)P(x)=x(x-1)Q(x)+ax+b$$

로 나타낼 수 있다. 항등식의 양변에 $x=0$ 또는 $x=1$을 대입하면 나머지정리에 의하여 $P(0)=2,\ P(1)=3$이므로

$x=0$을 대입 $\Rightarrow$ $P(0)=2=b$ $\cdots$ ㉠

$x=1$을 대입 $\Rightarrow$ $2P(1)=6=a+b$ $\cdots$ ㉡

이다. ㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=4,\ b=2$이다. 따라서 구하는 나머지는 $4x+2$이다.

답 $4x+2$

나머지정리와 인수정리의 응용 2

예제 06 다항식 $P(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지는 $2x-1$이고 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는 10이다. 이때 $P(x)$를 $(x^2+x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

길잡이 다항식 $P(x)$를 $(x-\alpha)(x^2+px+q)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지는 이차식 이하이므로

$$P(x)=\underbrace{(x-\alpha)(x^2+px+q)Q(x)}_{㉠}+\underbrace{ax^2+bx+c}_{㉡}$$

라 놓고 나머지를 구한다. 이때 $P(x)$를 x^2+px+q로 나누었을 때 나머지가 $rx+s$라 하면 ㉡을

$$ax^2+bx+c=a(x^2+px+q)+rx+s$$

와 같이 간단히 할 수 있다.

풀 이

1단계 다항식 $P(x)$를 $(x^2+x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 나머지를 x^2+x+1을 이용하여 간단히 나타낸다.

다항식 $P(x)$를 $(x^2+x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 다항식의 나눗셈으로 나타내면

$$P(x)=\underbrace{(x^2+x+1)(x-1)Q(x)}_{㉢}+\underbrace{ax^2+bx+c}_{㉣}$$

이다. (단, a, b, c는 상수) 조건으로부터 $P(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지는 $2x-1$이고, ㉢은 x^2+x+1로 나누어떨어지므로 ㉣을 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지가 $2x-1$이다. 그러므로

$$ax^2+bx+c=a(x^2+x+1)+2x-1$$

이라 놓을 수 있고, $P(x)$는 다음과 같다.

$$P(x)=(x^2+x+1)(x-1)Q(x)+a(x^2+x+1)+2x-1 \qquad \cdots ㉤$$

2단계 나머지정리를 이용하여 상수 a의 값을 찾는다.

$P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 10이므로 ㉤의 양변에 $x=1$을 대입하면 나머지정리에 의하여

$$P(1)=3a+2-1=10 \quad \Rightarrow \quad a=3$$

이다. 따라서 구하는 나머지는 다음과 같다.

$$ax^2+bx+c=3\cdot(x^2+x+1)+2x-1=3x^2+5x+2$$

정답 $3x^2+5x+2$

• 다항식의 나눗셈(p.39)

• 나머지정리(p.61)

돌다리 두드리기

다항식 $P(x)$를 x^2+1로 나누었을 때의 나머지가 $x+3$이고, $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 -5이다. 이때 다항식 $P(x)$를 $(x^2+1)(x-2)$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

돌다리 두드리기

답 $-2x^2+x+1$

$$P(x)=(x^2+1)(x-2)Q(x)+a(x^2+1)+x+3$$

에서 $P(2)=5a+5=-5$이므로 $a=-2$이다. 따라서 나머지는 $-2x^2+x+1$이다.

개념 그대로

유제 06-1

다항식 $P(x)$를 $x+1$과 $(x-1)^2$로 나누었을 때의 나머지가 각각 8, $3x-1$일 때, $P(x)$를 $(x-1)^2(x+1)$으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

다항식 $P(x)$를 $(x-1)^2(x+1)$로 나눈 다항식의 나눗셈으로 나타내면

$$P(x)=\underbrace{(x-1)^2(x+1)Q(x)}_{㉠}+\underbrace{ax^2+bx+c}_{㉡}$$

이다. (단, a, b, c는 상수) 조건으로부터 $P(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $3x-1$이고, ㉠은 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로 ㉡을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $3x-1$이다. 그러므로

$$ax^2+bx+c=a(x-1)^2+3x-1$$

이라 놓을 수 있다.

$$P(x)=(x-1)^2(x+1)Q(x)+a(x-1)^2+3x-1$$

이고 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 8이므로 $x=-1$을 대입하면 나머지정리에 의하여

$$P(-1)=4a-3-1=8 \quad \Rightarrow \quad a=3$$

이다. 따라서 구하는 나머지는 $3(x-1)^2+3x-1=3x^2-3x+2$이다.

답 $3x^2-3x+2$

개념 더하기

유제 06-2

+ 다항식의 나눗셈과 항등식(p.53)

다항식 $P(x)$를 $x-1$, x^2-4x+5, $(x-1)(x^2-4x+5)$로 나누었을 때의 나머지가 각각 4, $ax+b$, $(x-c)^2$이라 한다. 이때, 상수 a, b, c (단, $c>0$)의 값을 각각 구하시오.

나머지정리에 의하여 $P(1)=4$이다. $P(x)$를 x^2-4x+5와 $(x-1)(x^2-4x+5)$로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q(x)$, $Q'(x)$라 하면

$$P(x)=(x^2-4x+5)Q(x)+ax+b \quad \cdots ㉠$$

$$P(x)=(x-1)(x^2-4x+5)Q'(x)+(x-c)^2 \quad \cdots ㉡$$

이라 놓을 수 있다. $P(1)=4$를 ㉡에 대입하면

$$(1-c)^2=4 \quad \Rightarrow \quad 1-c=\pm 2$$

에서 $c>0$이므로 $c=3$이다. 또한, ㉠, ㉡에서 $(x-3)^2$을 x^2-4x+5로 나누었을 때의 나머지가 $ax+b$이다. 따라서

$$(x-3)^2=x^2-6x+9=(x^2-4x+5)+ax+b$$

에서 $a-4=-6$, $b+5=9$이므로 $a=-2$, $b=4$이다.

답 $a=-2$, $b=4$, $c=3$

개념 더하기

유제 06-3

+ 다항식의 곱셈(p.20)

다항식 $P(x)$를 $(x^2+x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫은 $x+2$이고, 다항식 $P(x)$를 x^2+x+1과 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 각각 $x-6$, 1일 때, 다항식 $P(x)$를 구하시오.

다항식 $P(x)$를 $(x^2+x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 나머지를 ax^2+bx+c (단, a, b, c는 상수)라 두고 다항식의 나눗셈으로 나타내면

$$P(x)=\underbrace{(x^2+x+1)(x-1)(x+2)}_{㉠}+\underbrace{ax^2+bx+c}_{㉡}$$

이다. 주어진 조건으로부터 $P(x)$를 x^2+x+1로 나누었을 때의 나머지는 $x-6$이다. ㉠은 x^2+x+1으로 나누어떨어지므로 ㉡을 x^2+x+1으로 나누었을 때의 나머지가 $x-6$이다. 그러므로 구하는 나머지를

$$ax^2+bx+c=a(x^2+x+1)+x-6$$

이라 둘 수 있다. 따라서

$$P(x)=(x^2+x+1)(x-1)(x+2)+a(x^2+x+1)+x-6$$

이고 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 1이므로 $x=1$을 대입하면 나머지정리에 의하여

$$P(1)=3a+1-6=1 \quad \Rightarrow \quad a=2$$

이므로 나머지는 $2(x^2+x+1)+x-6=2x^2+3x-4$이다. 따라서 구하는 다항식 $P(x)$는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^2+x+1)(x-1)(x+2)+2x^2+3x-4\\&=(x^3-1)(x+2)+2x^2+3x-4\\&=x^4+2x^3-x-2+2x^2+3x-4\\&=x^4+2x^3+2x^2+2x-6\end{aligned}$$

답 $x^4+2x^3+2x^2+2x-6$

조립제법

예제 07 조립제법을 이용하여 다항식 $2x^3+x^2-3x-1$을 다음 식으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하시오.

(1) $x+2$　　　　(2) $2x-1$

길잡이 다항식을 일차식으로 나눌 때 **나머지만 구하려면 나머지정리**를, **몫과 나머지를 함께 구하려면 조립제법**을 이용하면 된다. 조립제법은 다항식의 계수만을 이용하여 간단하게 몫과 나머지를 구하는 방법이다.

풀 이

(1) 조립제법을 이용하여 다항식 $2x^3+x^2-3x-1$을 $x+2$로 나누면 오른쪽과 같다. 따라서

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & 1 & -3 & -1 \\ & & -4 & 6 & -6 \\ \hline & 2 & -3 & 3 & \boxed{-7} \end{array}$$

$$2x^3+x^2-3x-1=(x+2)(2x^2-3x+3)-7$$

이다. 따라서 몫은 $2x^2-3x+3$이고 나머지는 -7이다.

(2) 조립제법을 이용하여 다항식 $2x^3+x^2-3x-1$을 $x-\frac{1}{2}$로 나누면 오른쪽과 같다. 따라서

$$\begin{array}{r|rrrr} \frac{1}{2} & 2 & 1 & -3 & -1 \\ & & 1 & 1 & -1 \\ \hline & 2 & 2 & -2 & \boxed{-2} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2x^3+x^2-3x-1 &= \left(x-\frac{1}{2}\right)(2x^2+2x-2)-2 \\ &= (2x-1)(x^2+x-1)-2 \end{aligned}$$

이므로 몫은 x^2+x-1이고 나머지는 -2이다.

정답 (1) 몫: $2x^2-3x+3$, 나머지: -7
(2) 몫: x^2+x-1, 나머지: -2

• 조립제법(p.63)
• 다항식의 나눗셈(p.39)

돌다리 두드리기

조립제법을 이용하여 다항식 x^3-3x^2+4x-3을 $x-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하시오.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -3 & 4 & -3 \\ & & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & \boxed{-1} \end{array}$$ 이므로

$x^3-3x^2+4x-3=(x-1)(x^2-2x+2)-1$에서 몫은 x^2-2x+2이고 나머지는 -1이다.

돌다리 두드리기
|답| 몫: x^2-2x+2, 나머지: -1

개념 그대로

유제 07-1

조립제법을 이용하여 다항식 x^3+x^2-x-2를 $x+2$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하는 과정이다. 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하시오.

$$\begin{array}{r|rrrr} a & 1 & 1 & -1 & -2 \\ & & -2 & c & -2 \\ \hline & 1 & b & 1 & \boxed{d} \end{array}$$

조립제법을 이용하여 다항식 x^3+x^2-x-2를 $x+2$로 나누면

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ & & -2 & 2 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & 1 & \boxed{-4} \end{array}$$

이다. $a=-2$, $b=-1$, $c=2$, $d=-4$이므로 구하는 값은 $a+b+c+d=-5$이다.

답 -5

개념 그대로

유제 07-2

조립제법을 이용하여 다항식 ax^3+bx^2+cx+d를 $x+3$으로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구하는 과정이다.
상수 a, b, c, d에 대하여 $a-b-c+d$의 값을 구하시오.

$$\begin{array}{r|rrrr} -3 & a & b & c & d \\ & & -6 & 3 & -12 \\ \hline & 2 & -1 & 4 & \boxed{-6} \end{array}$$

조립제법을 이용하여 미지수를 구하면 다음과 같다.

$a=2$, $b+(-6)=-1$, $c+3=4$, $d+(-12)=-6$

에서 $a=2$, $b=5$, $c=1$, $d=6$임을 알 수 있다. 따라서 구하는 값은
$a-b-c+d=2-5-1+6=2$이다.

답 2

개념 그대로

유제 07-3

다항식 x^3-x^2-3x+7을 일차식 $x-1$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하자. 이때 $Q(x)$를 일차식 $2x-1$로 나눈 나머지를 구하시오.

다항식 x^3-x^2-3x+7을 일차식$x-1$로 나누었을 때의 몫을 일차식 $x-\frac{1}{2}$로 다시 나누는 과정을 조립제법을 이용하면 다음과 같다. 따라서

$$x^3-x^2-3x+7=(x-1)(x^2-3)+4$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -1 & -3 & 7 \\ & & 1 & 0 & -3 \\ \hline \frac{1}{2} & 1 & 0 & -3 & \boxed{4} \\ & & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \\ \hline & 1 & \frac{1}{2} & \boxed{-\frac{11}{4}} & \end{array}$$

에서 $Q(x)=x^2-3$이고

$$x^2-3=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{11}{4}=(2x-1)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\right)-\frac{11}{4}$$

이므로 구하는 값은 $-\frac{11}{4}$이다.

답 $-\frac{11}{4}$

조립제법의 응용

예제 08

다항식 $P(x)=3x^3+x^2-6x-1$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) $P(x)=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$가 x에 대한 항등식일 때, 상수 $a,\ b,\ c,\ d$의 값을 구하시오.

(2) 다항식 $P(x)$를 $(x-1)^2$으로 나눈 나머지를 구하시오.

| 길잡이 | 조립제법을 이용하면 다항식 $P(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 구할 수 있고, 그때의 몫을 다시 $x-\alpha$로 나누면 새로운 몫과 나머지를 구할 수 있다. 이와 같이 반복하여 조립제법을 이용하면 다항식 $P(x)$를

$$P(x)=a(x-\alpha)^3+b(x-\alpha)^2+c(x-\alpha)+d$$

의 꼴로 표현할 수 있으며 이를 $x-\alpha$에 대하여 내림차순으로 정리한다고 한다.
(단, $a,\ b,\ c,\ d$는 상수이다.)

| 풀 이 |

(1) 조립제법을 연속으로 시행하고 이 결과를 다항식의 나눗셈의 관계식의 꼴로 나타내면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 3 & 1 & -6 & -1 \\ & & 3 & 4 & -2 \\ \hline 1 & 3 & 4 & -2 & \boxed{-3} \\ & & 3 & 7 & \Uparrow \\ \hline 1 & 3 & 7 & \boxed{5} & d \\ & & 3 & \Uparrow & \\ \hline & 3 & \boxed{10} & c & \\ & \Uparrow & \Uparrow & & \\ & a & b & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} P(x) &= (x-1)(3x^2+4x-2)-3 \\ &= (x-1)\{(x-1)(3x+7)+5\}-3 \\ &= (x-1)[(x-1)\{(x-1)\cdot 3+10\}+5]-3 \end{aligned}$$

이고 전개하면

$$P(x)=3(x-1)^3+10(x-1)^2+5(x-1)-3$$

이므로 $a=3,\ b=10,\ c=5,\ d=-3$이다.

(2) (1)의 결과로부터

$$P(x)=\underbrace{3(x-1)^3+10(x-1)^2}_{㉠}+\underbrace{5(x-1)-3}_{㉡}$$

이다. 이때 ㉠은 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지고 ㉡은 일차식이므로 $P(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $5(x-1)-3=5x-8$이다.

| 정답 | (1) $a=3,\ b=10,\ c=5,\ d=-3$ (2) $5x-8$

- 조립제법(p.63)
- 다항식의 나눗셈과 항등식(p.53)

돌다리 두드리기

등식 $x^3-3x^2+4x-3=a(x-1)^3+b(x-1)^2+c(x-1)+d$가 x에 대한 항등식일 때, 상수 $a,\ b,\ c,\ d$의 값을 구하시오.

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -3 & 4 & -3 \\ & & 1 & -2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & -2 & 2 & \boxed{-1} \\ & & 1 & -1 & \\ \hline 1 & 1 & -1 & \boxed{1} & \\ & & 1 & & \\ \hline & 1 & \boxed{0} & & \end{array}$$

이므로

$x^3-3x^2+4x-3=1\cdot(x-1)^3+0\cdot(x-1)^2+1\cdot(x-1)-1$
에서 $a=1,\ b=0,\ c=1,\ d=-1$이다.

돌다리 두드리기
| 답 | $a=1,\ b=0,\ c=1,\ d=-1$

개념 그대로

유제 08-1

다항식 $x^3+a^2x+bx-2$가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어질 때 a, b의 값을 구하시오.

다항식 x^3+ax^2+bx-2가 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지므로 조립제법을 이용하면

1	1	a	b	-2
		1	$a+1$	$a+b+1$
1	1	$a+1$	$a+b+1$	$a+b-1$
		1	$a+2$	
	1	$a+2$	$2a+b+3$	

에서 $a+b-1=0$, $2a+b+3=0$이므로 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=5$이다.

답 $a=-4$, $b=5$

개념 그대로

유제 08-2

다항식 x^3-x^2-3x+7을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

다항식 x^3-x^2-3x+7을 일차식 $x-1$로 반복하여 나누는 과정을 조립제법을 이용하면 오른쪽과 같다. 따라서 다항식 x^3-x^2-3x+7은

$$x^3-x^2-3x+7$$
$$=(x-1)[(x-1)\{(x-1)\cdot 1+2\}-2]+4$$
$$=(x-1)^2(x-1)+(x-1)^2\cdot 2-2(x-1)+4$$
$$=\underbrace{(x-1)^3+2(x-1)^2}_{㉠}\underbrace{-2(x-1)+4}_{㉡}$$

1	1	-1	-3	7
		1	0	-3
1	1	0	-3	4
		1	1	
1	1	1	-2	
		1		
	1	2		

로 나타낼 수 있다. 이때 ㉠은 $(x-1)^2$으로 나누어떨어지고 ㉡은 일차식이므로 구하는 나머지는 $-2(x-1)+4=-2x+6$이다.

답 $-2x+6$

개념 그대로

유제 08-3

다항식 $2x^3-19x^2+63x-67=a(x-3)^3+b(x-3)^2+cx+d$가 x에 대한 항등식일 때, 상수 a, b, c, d의 값을 구하시오.

다항식 $2x^3-19x^2+63x-67$을 일차식 $x-3$으로 반복하여 나누는 과정을 조립제법을 이용하면 오른쪽과 같다. 따라서 다항식 $2x^3-19x^2+63x-67$은

$$2x^3-19x^2+63x-67$$
$$=2(x-3)^3-(x-3)^2+3(x-3)+5$$
$$=2(x-3)^3-(x-3)^2+3x-4$$

3	2	-19	63	-67
		6	-39	72
3	2	-13	24	5
		6	-21	
3	2	-7	3	
		6		
	2	-1		

로 나타낼 수 있다. 따라서 $a=2$, $b=-1$, $c=3$, $d=-4$이다.

답 $a=2$, $b=-1$, $c=3$, $d=-4$

02-1 항등식 [1-6]

등식 $ax^2+y^2-9a-16=0$이 a에 대한 항등식이 되도록 하는 실수 x, y에 대하여 $x-y$의 최댓값을 구하시오.

주어진 등식을 a에 대하여 정리하면

$$(x^2-9)a+(y^2-16)=0$$

이 식이 a에 대한 **항등식(p.48)**이 되려면

$$x^2-9=0,\quad y^2-16=0 \quad \Rightarrow \quad x^2=9,\quad y^2=16$$

이 되어야 한다. 따라서

$$x=\pm3,\quad y=\pm4$$

이다. $x-y$의 최댓값은 $x=3$, $y=-4$일 때이므로 구하는 값은

$$x-y=3-(-4)=7$$

답 7

02-2

$x-y=3$을 만족시키는 모든 실수 x, y에 대하여 등식 $ax^2+by^2+cx=12$가 성립할 때, 상수 a, b, c에 대하여 $3a-3b+2c$의 값을 구하시오.

$x-y=3$이므로 $x=3+y$로 놓을 수 있다. $y=x-3$을 주어진 등식에 대입하여 y에 대하여 정리하면

$$ax^2+b(x-3)^2+cx=12$$

$$ax^2+b(x^2-6x+9)+cx=12$$

$$(a+b)x^2+(c-6b)x+(9b-12)=0$$

이다. 이 등식은 x에 대한 **항등식(p.48)**이므로 **항등식의 성질(p.50)**에 의하여

$$a+b=0,\quad c-6b=0,\quad 9b-12=0$$

이다. $b=\frac{4}{3}$이므로 $a=-\frac{4}{3}$이고 $c=8$이다. 따라서 구하는 값은

$$3a-3b+2c=3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)-3\cdot\frac{4}{3}+2\cdot8=8$$

답 8

02-3

$f(x)$가 x에 대한 다항식이고 임의의 x에 대하여 등식

$$(x+1)(x^2-3)f(x)=x^4+ax^2+b$$

가 항상 성립할 때, 두 상수 a, b의 값을 각각 구하시오.

주어진 식이 x에 대한 **항등식(p.48)**이므로 **수치대입법(p.52)**을 이용하기 위해 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$0=1+a+b \quad \Rightarrow \quad a+b=-1 \qquad \cdots ㉠$$

이고 양변에 $x^2=3$을 대입하면

$$0=9+3a+b \quad \Rightarrow \quad 3a+b=-9 \qquad \cdots ㉡$$

이다. ㉠, ㉡의 식을 연립하여 풀면 $a=-4$, $b=3$이다.

답 $a=-4$, $b=3$

02-4

상수 a, b, c에 대하여 등식

$$a(x-y+4)+b(x+2y-2)=-4x+y-c$$

가 x, y의 값에 관계없이 항상 성립할 때, $a+b+c$의 값을 구하시오.

주어진 식의 좌변을 x, y에 대하여 정리하면

$$(a+b)x+(-a+2b)y+(4a-2b)=-4x+y-c$$

이다. 이 식은 x, y에 대한 **항등식(p.48)**이므로

$$a+b=-4 \qquad \cdots ㉠$$

$$-a+2b=1 \qquad \cdots ㉡$$

$$4a-2b=-c \qquad \cdots ㉢$$

을 만족한다. ㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$a=-3,\quad b=-1$$

이므로 이 값을 ㉢에 대입하면 $c=10$이다. 따라서 구하는 값은

$$a+b+c=-3-1+10=6$$

답 6

02-5

x에 대한 이차방정식 $x^2+(k-2)x-(2k+5)p+q+3=0$이 실수 k의 값에 관계없이 항상 2를 근으로 가질 때, 상수 p, q의 값을 각각 구하시오.

주어진 x에 대한 이차방정식에 $x=2$를 대입하면

$$2^2+(k-2)\cdot2-(2k+5)p+q+3=2k-(2k+5)p+q+3=0$$

이다. 이 식을 k에 대하여 정리하면

$$(2-2p)k+(-5p+q+3)=0$$

이다. 이 식이 k에 대한 **항등식(p.48)**이므로 **항등식의 성질(p.49)**에 의하여

$$2-2p=0,\quad -5p+q+3=0$$

이므로 연립하여 풀면 $p=1$, $q=2$이다.

답 $p=1$, $q=2$

02-6

다항식 x^3+ax^2+bx-4를 x^2-1로 나누었을 때의 나머지가 8일 때, 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오.

다항식 x^3+ax^2+bx-4를 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $x+c$ (단, c는 상수)라 하면 나머지가 8이므로

$$x^3+ax^2+bx-4=(x^2-1)(x+c)+8 \qquad \cdots ㉠$$

로 나타낼 수 있다. ㉠의 양변에 1을 대입하면 **나머지정리(p.61)**에 의해 $a+b=11$이고 ㉠의 양변에 -1을 대입하면 $a-b=13$이다. 두 식을 연립하여 풀면 $a=12$, $b=-1$이므로 $a^2+b^2=145$이다.

[다른 풀이]

다항식의 곱셈을 이용하여 ㉠의 우변을 전개하면

$$(x^2-1)(x+c)+8=x^3+cx^2-x+8-c$$

이므로 즉, 등식

$$x^3+ax^2+bx-4=x^3+cx^2-x+8-c$$

은 x에 대한 **항등식(p.48)**으로 볼 수 있다. **항등식의 성질(p.50)**에 의하여

$$a=c,\quad b=-1,\quad -4=8-c$$

이므로 $c=12$, $a=12$, $b=-1$이다. 따라서 구하는 값은 $a^2+b^2=145$이다.

답 145

02-7 나머지정리와 인수정리 [7-12]

다항식 $P(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 나머지가 6일 때, 다항식 $xP(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

다항식 $P(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면

$$P(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)Q(x)+6$$

으로 나타낼 수 있다. **나머지정리(p.61)**에 의하여 $P\left(\frac{1}{2}\right)=6$이다.
다항식 $f(x)=xP(x)$라 하면 다항식 $xP(x)$를 $2x-1$로 나누었을 때의 나머지는 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot P\left(\frac{1}{2}\right)=6\cdot\frac{1}{2}=3$이다.

답 3

02-8

다항식 $P(x)$를 x^2-7x+6으로 나누었을 때의 나머지가 $2x-1$일 때, 다항식 $P(x+4)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

다항식 $P(x)$를 x^2-7x+6으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지는 $2x-1$이므로

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^2-7x+6)Q(x)+2x-1\\&=(x-6)(x-1)Q(x)+2x-1\end{aligned}$$

로 나타낼 수 있다. 다항식 $f(x)=P(x+4)$라 하면 다항식 $P(x+4)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 **나머지정리(p.61)**에 의하여 다음과 같다.

$$f(2)=P(2+4)=P(6)=0+2\cdot6-1=11$$

답 11

02-9

다항식 $P(x)$가 $x-1$로 나누어떨어지고 다항식 $P(x)$를 다항식 x^2-5x+6로 나누었을 때의 나머지가 $2x-3$일 때, 다항식 $P(x)$를 다항식 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

다항식 $P(x)$가 $x-1$으로 나누어떨어지므로 **인수정리(p.61)**에 의하여 $P(1)=0$이다. 다항식 $P(x)$를 x^2-5x+6으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지는 $2x-3$이므로

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^2-5x+6)Q_1(x)+2x-3\\&=(x-2)(x-3)Q_1(x)+2x-3\end{aligned}$$

이고 **나머지정리(p.61)**에 의하여 $P(3)=2\times3-3=3$이다. 한편 다항식 $P(x)$를 다항식 x^2-4x+3으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$라 하면

$$\begin{aligned}P(x)&=(x^2-4x+3)Q_2(x)+ax+b\\&=(x-1)(x-3)Q_2(x)+ax+b \quad\cdots㉠\end{aligned}$$

이다. $P(1)=0$이고 $P(3)=3$이므로 이 값을 ㉠에 대입하면

$$P(1)=a+b=0,\quad P(3)=3a+b=3$$

에서 두 식을 연립하여 풀면 $a=\frac{3}{2}$, $b=-\frac{3}{2}$이다. 따라서 구하는 나머지는 $R(x)=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$이다.

답 $\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$

02-10

최고차항의 계수가 1인 삼차 다항식 $P(x)$에 대하여 $P(-1)=P(1)=P(2)=3$일 때, $P(4)$의 값을 구하시오.

나머지정리(p.61)에 의하여 다항식 $P(x)$를 $x+1$, $x-1$, $x-2$로 나누었을 때의 나머지가 모두 3임을 알 수 있다. 따라서 다항식 $Q(x)$를

$$Q(x)=P(x)-3$$

으로 놓으면 다항식 $Q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이고

$$Q(-1)=Q(1)=Q(2)=0$$

을 만족한다. **인수정리(p.61)**에 의하여 다항식 $Q(x)$는 다항식 $x+1$, $x-1$, $x-2$를 인수로 가지므로

$$Q(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$$

라 놓을 수 있다. 즉, 다항식 $P(x)$는

$$P(x)=(x+1)(x-1)(x-2)+3$$

이므로 $P(4)$의 값을 구하면

$$P(4)=(4+1)(4-1)(4-2)+3=5\cdot3\cdot2+3=33$$

답 33

02-11

다항식 $P(x)$에 대하여 $P(x)+1$은 다항식 $x+1$로 나누어떨어지고, $P(x)+3$은 다항식 $x-1$로 나누어떨어진다고 한다. 다항식 $P(x)$를 다항식 $(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라고 할 때, $R(2)$의 값을 구하시오.

인수정리(p.61)에 의하여

$$P(-1)+1=0,\quad P(1)+3=0$$

이므로 $P(-1)=-1$, $P(1)=-3$이다. 다항식 $P(x)$를 다항식 $(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)=ax+b$라 하면

$$P(x)=(x+1)(x-1)Q(x)+ax+b$$

로 나타낼 수 있다. 양변에 $x=-1$, $x=1$을 대입하면

$$P(-1)=-a+b=-1,\quad P(1)=a+b=-3$$

이다. 두 식을 연립하여 풀면

$$a=-1,\quad b=-2$$

이므로 $R(x)=-x-2$이고 구하는 값은 $R(2)=-2-2=-4$이다.

답 -4

02-12

임의의 실수 x에 대하여 등식

$$8x^3-8x^2+4x+1=a(2x-1)^3+b(2x-1)^2+c(2x-1)+d$$

가 성립할 때, 상수 a, b, c, d의 값을 구하시오.

다항식 $8x^3-8x^2+4x+1$을 일차식 $x-\frac{1}{2}$로 반복하여 나누는 과정을 **조립제법(p.63)**을 이용하면 다음과 같다. 따라서 다항식 $8x^3-8x^2+4x+1$은

$\frac{1}{2}$	8	-8	4	1
		4	-2	1
$\frac{1}{2}$	8	-4	2	2
		4	0	
$\frac{1}{2}$	8	0	2	
		4		
	8	4		

$$\begin{aligned}&8x^3-8x^2+4x+1\\&=8\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(x-\frac{1}{2}\right)+2\\&=(2x-1)^3+(2x-1)^2+(2x-1)+2\end{aligned}$$

로 나타낼 수 있고 $a=1$, $b=1$, $c=1$, $d=2$이다.

답 $a=1$, $b=1$, $c=1$, $d=2$

02-1

실수 a, b에 대하여 $\dfrac{a-5x}{x+b}$가 x에 값에 관계없이 항상 일정한 값을 가질 때, $\dfrac{a}{b}$의 값을 구하시오. (단, $x\neq -b$, $b\neq 0$)

$\dfrac{a-5x}{x+b}$는 x에 값에 관계없이 항상 일정한 값을 가지므로 $\dfrac{a-5x}{x+b}=k$라하면 $x\neq -b$, $b\neq 0$이므로

$$a-5x=k(x+b) \quad \Rightarrow \quad (k+5)x+(kb-a)=0$$

이 $x\neq -b$인 모든 실수 x에 대하여 성립한다. 즉, **항등식의 성질(p.49)**에 의하여

$$k+5=0, \quad kb-a=0$$

이므로 $k=-5$이고 $a=-5b$이므로 구하는 값은 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{-5b}{b}=-5$이다.

답 -5

02-2

다항식 $x^{2018}+1$을 x^2-1로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

$x^{2018}+1$을 x^2-1로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$라 하면

$$x^{2018}+1=(x^2-1)Q(x)+ax+b$$
$$=(x-1)(x+1)Q(x)+ax+b \qquad \cdots ㉠$$

이다. 이 식은 x에 대한 **항등식(p.48)**이므로 ㉠의 양변에 $x=1$을 **대입(p.52)**하면

$$2=a+b \qquad \cdots ㉡$$

이고 ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$2=-a+b \qquad \cdots ㉢$$

이다. ㉡, ㉢을 연립하여 풀면

$$a=0, \quad b=2$$

이므로 다항식 $x^{2018}+1$을 x^2-1로 나누었을 때의 나머지는 2이다.

답 2

02-3

등식

$$(x^3+2x^2-3x-3)^4=a_0+a_1x+\cdots+a_{11}x^{11}+a_{12}x^{12}$$

이 x에 대한 항등식일 때, $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{11}$의 값을 구하시오. (단, a_0, a_1, a_2, $\cdots$, a_{12}는 상수이다.)

주어진 등식이 x에 대한 **항등식(p.48)**이므로 $x=1$을 **대입(p.52)**하면

$$a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{11}+a_{12}=81 \qquad \cdots ㉠$$

이고 주어진 등식에 $x=-1$을 대입하면

$$a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{11}+a_{12}=1 \qquad \cdots ㉡$$

이다. ㉠$-$㉡을 하면

$$2(a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{11})=81-1=80$$

에서 구하는 값은

$$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{11}=40$$

답 40

02-4

최고차항의 계수가 3인 삼차식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지가 1이고 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나누었을 때의 몫과 나머지가 서로 같을 때, $f(x)$를 $(x+1)^3$으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

$f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지가 1이므로 **나머지정리(p.61)**에 의하여 $f(-1)=1$이다.
또한, $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나눈 몫과 나머지를 $ax+b$ (단, a, b는 상수)라 하면

$$f(x)=(x+1)^2(ax+b)+(ax+b)$$

로 나타낼 수 있고 등식은 x에 대한 **항등식(p.53)**이다. 따라서 $f(x)$의 최고차항의 계수가 3이므로 $a=3$이고 $f(-1)=1$이므로 $x=-1$을 위 식의 양변에 **대입(p.52)**하여 정리하면 $b=a+1=4$이다. 즉,

$$f(x)=(x+1)^2(3x+4)+(3x+4)$$
$$=(x+1)^2\{3(x+1)+1\}+(3x+4)$$
$$=3(x+1)^3+(x+1)^2+(3x+4)$$
$$=3(x+1)^3+x^2+5x+5$$

이므로 $f(x)$를 $(x+1)^3$으로 나눈 나머지는 x^2+5x+5이다.

답 x^2+5x+5

02-5

등식

$$3x^3-4x^2-1$$
$$=a+b(x-1)+c(x-1)(x-2)+d(x-1)(x-2)(x-3)$$

은 x에 대한 항등식이다. 이때 상수 a, b, c, d의 합 $a+b+c+d$의 값을 구하시오.

주어진 등식은 x에 대한 **항등식(p.48)**이므로 **조립제법(p.63)**을 이용하여 $x-1$, $x-2$, $x-3$으로 차례로 나누면 다음과 같다.

1	3	-4	0	-1
		3	-1	-1
2	3	-1	-1	-2
		6	10	⇑
3	3	5	9	a
		9	⇑	
	3	14	b	
	⇑	⇑		
	d	c		

따라서 주어진 식 $3x^3-4x^2-1$은

$$3x^3-4x^2-1$$
$$=-2+9(x-1)+14(x-1)(x-2)+3(x-1)(x-2)(x-3)$$

으로 나타낼 수 있고 $a=-2$, $b=9$, $c=14$, $d=3$이므로 구하는 값은

$$a+b+c+d=-2+9+14+3=24$$

답 24

02-6

다항식 $P(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 나머지는 x^2-x+1이고, $(x-2)^2$로 나누었을 때의 나머지는 $2x+3$이다. 다항식 $P(x)$를 $(x-1)^2(x-2)$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

다항식 $P(x)$를 $(x-1)^2(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 ax^2+bx+c (단, a, b, c는 상수)라 하면

$$P(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+ax^2+bx+c$$

이다. 한편, 다항식 $P(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지가 x^2-x+1이므로

$$P(x)=(x-1)^3Q_1(x)+x^2-x+1$$
$$=(x-1)^2\{(x-1)Q_1(x)+1\}+x \qquad \cdots ㉠$$

이다. ㉠에서 다항식 $P(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 x이므로 다항식 $P(x)$를 $(x-1)^2(x-2)$로 나누었을 때의 나머지 ax^2+bx+c를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 나머지도 x가 되어야 한다.

$$P(x)=(x-1)^2(x-2)Q(x)+a(x-1)^2+x \qquad \cdots ㉡$$

로 나타낼 수 있다. 또한, 다항식 $P(x)$를 $(x-2)^2$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면 나머지가 $2x+3$이므로

$$P(x)=(x-2)^2Q_2(x)+2x+3 \qquad \cdots ㉢$$

로 나타낼 수 있다. 이때, **수치대입법(p.52)**을 이용하여 ㉢에 $x=2$를 대입하면

$$P(2)=2\cdot2+3=7$$

이고 ㉡에 $x=2$를 대입하면

$$P(2)=a(2-1)^2+2=a+2$$

이므로 $a+2=7$에서 $a=5$이다. 따라서 구하려는 나머지는 $5(x-1)^2+x=5x^2-9x+5$이다.

답 $5x^2-9x+5$

02-7

삼차식 $P(x)$가

$$P(0)=0,\quad P(1)=\frac{1}{2},\quad P(2)=\frac{2}{3},\quad P(3)=\frac{3}{4}$$

를 만족할 때, 다항식 $P(x)$를 $x-4$로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

$P(0)=0$이므로 삼차식의 상수항은 없다. 또한, 문제의 조건으로부터

$$2P(1)-1=0,\quad 3P(2)-2=0,\quad 4P(3)-3=0$$

이므로 $Q(x)=(x+1)P(x)-x$라 놓으면 $Q(x)$는 사차식이고

$$Q(0)=Q(1)=Q(2)=Q(3)=0$$

이다. 따라서 **인수정리(p.61)**에 의해 다항식 $Q(x)$는 x, $x-1$, $x-2$, $x-3$을 인수로 가진다고 할 수 있으며

$$Q(x)=ax(x-1)(x-2)(x-3)$$

(단, a는 0이 아닌 상수)로 놓을 수 있다. 즉,

$$(x+1)P(x)-x=ax(x-1)(x-2)(x-3) \qquad \cdots ㉠$$

이므로 양변에 $x=-1$을 대입하면

$$1=-a\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)=24a$$

에서 $a=\frac{1}{24}$이다. 따라서 다항식 $P(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지는 $P(4)$의 값이므로 ㉠에 $x=4$를 대입하면

$$5P(4)-4=\frac{1}{24}\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=1$$

에서 $P(4)=1$이다.

답 1

02-8

최고차항의 계수가 1인 세 개의 이차식 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 모두 만족할 때, $h(6)$의 값을 구하시오.

> (가) $f(2)=g(2)=0$
> (나) $f(x)g(x)=(x-2)^2(x-3)(x+4)$
> (다) $f(x)h(x)=(x-2)(x-3)^2(x-4)$

조건 (가)에서 $f(2)=g(2)=0$이므로 **인수정리(p.61)**에 의하여 다항식 $f(x)$와 $g(x)$는 모두 $x-2$를 인수로 가진다. 또한, 다항식 $f(x)$와 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차식이고 조건 (나)에서 $f(x)g(x)=(x-2)^2(x-3)(x+4)$이므로

$$f(x)=(x-2)(x-3),\quad g(x)=(x-2)(x+4) \qquad \cdots ㉠$$

이거나

$$f(x)=(x-2)(x+4),\quad g(x)=(x-2)(x-3) \qquad \cdots ㉡$$

이어야 한다. 이때, 조건 (다)에서 $f(x)h(x)=(x-2)(x-3)^2(x-4)$이므로 ㉡과 같은 경우가 될 수 없다. 따라서 ㉠과 같고 $f(x)=(x-2)(x-3)$이므로 $h(x)=(x-3)(x-4)$이다. 따라서 구하는 값은

$$h(6)=(6-3)(6-4)=3\cdot2=6$$

답 6

03 인수분해

정의 & 포인트 확인

- 인수분해
- 인수분해 공식 I
- 인수분해 공식 II
- 인수분해 공식 III

- 치환을 이용한 인수분해
- 여러 문자를 포함한 식의 인수분해
- 인수정리를 이용한 인수분해
- $P(\alpha)=0$인 α를 찾는 방법

03-1 인수분해 공식

인수분해

다항식의 전개는 두 개 이상의 다항식의 곱을 교환법칙과 결합법칙 및 분배법칙을 이용하여 하나의 다항식으로 나타내는 것이다. 반대로 인수분해는 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것이다. 이때 곱을 이루는 각각의 다항식을 인수라 한다.

정의 상 3.1 **인수분해**

인수분해는 하나의 다항식을 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것이다. 이때 곱을 이루는 각각의 다항식을 **인수**라 한다.

이차식 $(x+1)(x+2)$를 전개하면 x^2+3x+2이다. 이것을 거꾸로 표현하면

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

이다. 이때 두 일차식 $x+1$, $x+2$는 이차식 x^2+3x+2의 인수이다.

다항식의 전개와 인수분해

$$(a+b)(a-b) \underset{\text{인수분해}}{\overset{\text{전개}}{\rightleftharpoons}} a^2-b^2$$

다항식의 전개와 인수분해는 서로 거꾸로 계산하는 과정이므로 다항식의 곱셈 공식의 좌변과 우변을 바꾸면 인수분해 공식을 얻을 수 있다.

공통인수 묶기

가장 기본적인 인수분해의 방법은 다항식의 곱셈의 분배법칙을 거꾸로 이용하여 공통인수로 묶는 것이다. 다항식의 각 항에 공통으로 들어있는 인수를 묶으면 된다.

다음 두 다항식에는 각 항에 공통인수 m이 있으므로

$$mx+my=m(x+y), \quad mx-my=m(x-y)$$

와 같이 m으로 묶어 인수분해한다. 모든 항에 공통으로 들어있는 인수가 없다면 다음과 같이 단계별로 공통인수를 찾아 인수분해한다.

$$\begin{aligned} ab+a+b+1 &= a(b+1)+(b+1) && \leftarrow \text{공통인수 } a\text{로 묶는다.} \\ &= (a+1)(b+1) && \leftarrow \text{공통인수 } b+1\text{로 묶는다.} \end{aligned}$$

보기 3.1 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $ax+bx$ (2) $2ab^2-4a^2b$
(3) $a(x-2y)-x+2y$ (4) $1-x+y-xy$

보기 정답

3.1 (1) $(a+b)x$ (2) $2ab(b-2a)$
(3) $(a-1)(x-2y)$
(4) $(1-x)(1+y)$

이차식의 인수분해

중학교 때 배운 인수분해 공식을 활용하거나 **곱셈 공식 I**(p.22)의 좌변과 우변을 바꾸면 다음의 인수분해 공식을 얻을 수 있다.

포인트 상 3.2 **인수분해 공식 I**

1. $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2, \quad a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
2. $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
3. $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
4. $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

$(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b+c)^2$ 등의 꼴을 완전제곱이라 한다.

인수분해 공식 중에서

$$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

는 다음과 같은 과정으로 인수분해할 수 있다.

$$acx^2+\underline{(ad+bc)}x+bd=(ax+b)(cx+d)$$

$$\begin{array}{llcl} ax & b & \longrightarrow & bcx \\ cx & d & \longrightarrow & \underline{adx} \;(+ \\ & & & (ad+bc)x \end{array}$$

$2x^2+x-3$을 인수분해하면,

$$\begin{array}{llcll} 2 & 3 & \longrightarrow & 3 & \\ 1 & -1 & \longrightarrow & \underline{-2} \;(+ & \longrightarrow 2x^2+x-3=(2x+3)(x-1) \\ & & & 1 & \end{array}$$

x의 계수

보기 3.2 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $4x^2+4x+1$ (2) $a^2-6ab+9b^2$

(3) $9x^2-4$ (4) $4a^2-9b^2$

보기 3.3 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^2+7x+12$ (2) x^2-2x-8

(3) $2x^2+7x+6$ (4) $3x^2+5x-2$

보기 정답

3.2 (1) $(2x+1)^2$ (2) $(a-3b)^2$
(3) $(3x+2)(3x-2)$
(4) $(2a+3b)(2a-3b)$

3.3 (1) $(x+3)(x+4)$
(2) $(x+2)(x-4)$
(3) $(2x+3)(x+2)$
(4) $(3x-1)(x+2)$

삼차식의 인수분해

곱셈 공식 II(p.22)의 좌변과 우변을 바꾸면 다음의 인수분해 공식을 얻을 수 있다.

포인트 상 3.3 **인수분해 공식 II**

1. $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$, $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$
2. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

보기 3.4 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^3+3x^2+3x+1 (2) $8a^3-12a^2+6a-1$

(3) x^3+8 (4) $64a^3-b^3$

세 문자 식 또는 사차식의 인수분해

곱셈 공식 III(p.22)의 좌변과 우변을 바꾸면 다음의 인수분해 공식을 얻을 수 있다.

포인트 상 3.4 **인수분해 공식 III**

1. $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$
2. $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ (교육과정 외)

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}$$

3. $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$ (교육과정 외)

보기 3.5 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^2+y^2+4z^2+2xy+4yz+4zx$ (2) $4x^2+y^2+9z^2+4xy-6yz-12zx$

보기 3.6 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $a^3-b^3-c^3-3abc$ (2) $a^3+8b^3-c^3+6abc$

보기 3.7 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^4+x^2+1 (2) $16a^4+4a^2+1$

보기 정답

3.4 (1) $(x+1)^3$ (2) $(2a-1)^3$
(3) $(x+2)(x^2-2x+4)$
(4) $(4a-b)(16a^2+4ab+b^2)$

3.5 (1) $(x+y+2z)^2$
(2) $(2x+y-3z)^2$

3.6 (1) $(a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab-bc+ca)$
(2) $(a+2b-c)(a^2+4b^2+c^2-2ab+2bc+ca)$

3.7 (1) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
(2) $(4a^2+2a+1)(4a^2-2a+1)$

인수분해의 유용성

인수분해는 여러 가지 측면에서 유용한 점이 많다.

- **방정식의 해를 구할 때** 인수분해를 하면 식의 곱셈 구조가 나타나므로 방정식의 해를 구할 때 유용하다.
- **식의 값을 구할 때** 인수분해된 식의 값을 구하는 것이 그렇지 않은 식의 값을 구할 때보다 계산이 좀 더 간단하다. 예를 들어, $10.5^2-9.5^2$의 값을 계산하여 보자. 직접 계산이 어려우니 계산기를 활용하면 20임을 알 수 있다. 하지만 **인수분해 공식 I**(p.81)을 이용하면 간단히 계산할 수 있다. $10.5=x$, $9.5=y$라 하면

$$10.5^2-9.5^2=x^2-y^2=(x-y)(x+y)=1\cdot 20=20$$

이다.

소수와 합성수
1보다 큰 자연수는 소수와 합성수로 나뉜다. 소수(prime number, 素數)는 1과 자기 자신만으로 나누어떨어지는 자연수를 말하고, 합성수는 1과 자기 자신 이외의 다른 자연수들의 곱으로 나타낼 수 있는 자연수를 말한다.

자연수가 소수인지 합성수인지 판단할 수도 있다. 예를 들어, 1001은 **인수분해 공식 II**(p.82)를 이용하면

$$\begin{aligned}1001&=1000+1=10^3+1^3\\&=(10+1)(10^2-10\times 1+1^2)\\&=11\times 91=11\times 7\times 13\end{aligned}$$

따라서 1001은 7, 11, 13의 곱으로 소인수분해되므로 합성수이다.

한 걸음 더

다항식의 인수분해 범위

다항식 x^2-1을 인수분해할 때에는 망설임없이 바로

$$x^2-1=(x-1)(x+1)$$

으로 인수분해한다. 하지만 다항식 x^2-2를 인수분해할 때에는

$$x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

와 같이 인수분해해야 하는지 망설여진다. 보통 인수분해 문제의 경우 무리수가 계수인 경우가 없기 때문이다.

다항식 x^2-2를 실수 범위에서 인수분해할 경우에는

$$x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

와 같이 인수분해된다. 하지만 고등학교 과정에서는 특별한 조건이 없으면 다항식의 인수분해는 계수가 유리수인 범위에서 더 이상 인수분해할 수 없을 때까지 하므로 다항식 x^2-2는 더 이상 인수분해가 되지 않는 다항식이라고 할 수 있다.

인수분해 공식 I, II

예제 01

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $ax-ay-bx+by$　　(2) $(2x+1)^2-y^2$

(3) $2x^2+(a+2)x-a(a+1)$　　(4) $64x^3-48ax^2+12a^2x-a^3$

(5) $(x-y)^3-27$　　(6) $a^3-b^3-ab(a-b)$

길잡이 다음은 다항식을 인수분해할 때 가장 먼저 적용해 볼 수 있는 공식들이다. 식의 형태와 적용하는 공식을 연관지어 잘 익혀두자.

- $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$, $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$
- $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$
- $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
- $acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$
- $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$, $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$
- $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

풀 이

(1) $a(x-y)-b(x-y)=(a-b)(x-y)$

(2) $(2x+1)^2-y^2=(2x+1+y)(2x+1-y)=(2x+y+1)(2x-y+1)$

(3)
$$\begin{aligned}&2x^2+(a+2)x-a(a+1)\\&=2\cdot1\cdot x^2+\{2(a+1)+(-a)\cdot1\}x+(-a)\cdot(a+1)\\&=(2x-a)(x+a+1)\end{aligned}$$

(4) $64x^3-48ax^2+12a^2x-a^3=(4x)^3-3\cdot(4x)^2\cdot a+3\cdot4x\cdot a^2-a^3=(4x-a)^3$

(5)
$$\begin{aligned}(x-y)^3-27&=(x-y-3)\{(x-y)^2+3(x-y)+9\}\\&=(x-y-3)(x^2+y^2-2xy+3x-3y+9)\end{aligned}$$

(6)
$$\begin{aligned}a^3-b^3-ab(a-b)&=(a-b)(a^2+ab+b^2)-ab(a-b)\\&=(a-b)(a^2+b^2)\end{aligned}$$

정답 (1) $(a-b)(x-y)$　(2) $(2x+y+1)(2x-y+1)$
(3) $(2x-a)(x+a+1)$　(4) $(4x-a)^3$
(5) $(x-y-3)(x^2+y^2-2xy+3x-3y+9)$
(6) $(a-b)(a^2+b^2)$

• 인수분해 공식 II(p.82)
• 인수분해 공식 I(p.81)
• 곱셈 공식 I(p.22)

돌다리 두드리기

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $ab+ac+bd+cd$　　(2) $49x^2-25y^2$

(3) $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$　　(4) a^3-27

돌다리 두드리기

|답| (1) $(a+d)(b+c)$
(2) $(7x-5y)(7x+5y)$
(3) $(x+2y)^3$
(4) $(a-3)(a^2+3a+9)$

(1) (주어진 식)$=a(b+c)+d(b+c)=(a+d)(b+c)$
(2) (주어진 식)$=(7x)^2-(5y)^2=(7x-5y)(7x+5y)$
(3) (주어진 식)$=x^3+3\cdot x^2\cdot2y+3\cdot2x\cdot(2y)^2+(2y)^3=(x+2y)^3$
(4) (주어진 식)$=a^3-27=a^3-3^3=(a-3)(a^2+3a+9)$

정답 및 풀이 p.500

개념 그대로

유제 01-1

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $3x^2y-24xy+9xy^2$　　(2) $12a^2bc+6a^2b-18abc$

(3) $ab(a-x)+x-a$　　(4) $(3x-1)^2-5(3x-1)$

(1) $3x^2y-24xy+9xy^2=3xy(x-8+3y)=3xy(x+3y-8)$
(2) $12a^2bc+6a^2b-18abc=6ab(2ac+a-3c)$
(3) $ab(a-x)+x-a=ab(a-x)-(a-x)=(ab-1)(a-x)$
(4) $(3x-1)^2-5(3x-1)=(3x-1)(3x-1-5)=3(3x-1)(x-2)$

답 (1) $3xy(x+3y-8)$
(2) $6ab(2ac+a-3c)$
(3) $(ab-1)(a-x)$
(4) $3(3x-1)(x-2)$

개념 그대로

유제 01-2

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $16a^2b^2-49$　　(2) $(x+2y)^2-(2x-y)^2$

(3) $2a^2-12ab+18b^2$　　(4) $x^2+(2y+1)x+y^2+y$

(1) $16a^2b^2-49=(4ab)^2-7^2=(4ab+7)(4ab-7)$
(2) $(x+2y)^2-(2x-y)^2=\{x+2y+(2x-y)\}\{x+2y-(2x-y)\}$
$=(3x+y)(-x+3y)$
$=-(3x+y)(x-3y)$
(3) $2a^2-12ab+18b^2=2(a^2-6ab+9b^2)=2(a-3b)^2$
(4) $x^2+(2y+1)x+y^2+y=x^2+\{y+(y+1)\}x+y(y+1)$
$=(x+y)(x+y+1)$

답 (1) $(4ab+7)(4ab-7)$
(2) $-(3x+y)(x-3y)$
(3) $2(a-3b)^2$
(4) $(x+y)(x+y+1)$

개념 그대로

유제 01-3

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $a^3b^3-3a^2b^2+3ab-1$　　(2) $27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$

(3) $(2a+b)^3+8$　　(4) $(x-y)^3-z^3$

(1) $a^3b^3-3a^2b^2+3ab-1=(ab)^3-3(ab)^2+3\cdot ab-1=(ab-1)^3$
(2) $27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$
$=(3x)^3-3\cdot(3x)^2\cdot 2y+3\cdot 3x\cdot(2y)^2-(2y)^3$
$=(3x-2y)^3$
(3) $(2a+b)^3+8=(2a+b+2)\{(2a+b)^2-(2a+b)\cdot 2+2^2\}$
$=(2a+b+2)(4a^2+b^2+4ab-4a-2b+4)$
(4) $(x-y)^3-z^3=(x-y-z)\{(x-y)^2+(x-y)z+z^2\}$
$=(x-y-z)(x^2+y^2+z^2-2xy-yz+zx)$

답 (1) $(ab-1)^3$　(2) $(3x-2y)^3$
(3) $(2a+b+2)(4a^2+b^2+4ab-4a-2b+4)$
(4) $(x-y-z)(x^2+y^2+z^2-2xy-yz+zx)$

예제 02 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^2+4y^2+4xy-4x-8y+4$ (2) $x^3-y^3+8z^3+6xyz$

(3) $a^3-8b^3+18ab+27$ (4) $81x^4+36x^2y^2+16y^4$

길잡이 다음의 인수분해 공식을 이용한다.

- $a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2$
- $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$
- $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$

풀 이

• 인수분해 공식 III(p.82)

(1)

$$\begin{aligned}&x^2+4y^2+4xy-4x-8y+4\\&=x^2+(2y)^2+(-2)^2+2\cdot x\cdot 2y+2\cdot 2y\cdot(-2)+2\cdot x\cdot(-2)\\&=(x+2y-2)^2\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&x^3-y^3+8z^3+6xyz\\&=x^3+(-y)^3+(2z)^3-3\cdot x\cdot(-y)\cdot 2z\\&=(x-y+2z)\{x^2+(-y)^2+(2z)^2-x\cdot(-y)-(-y)\cdot 2z-2z\cdot x\}\\&=(x-y+2z)(x^2+y^2+4z^2+xy+2yz-2zx)\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}&a^3-8b^3+27+18ab\\&=a^3+(-2b)^3+3^3-3\cdot a\cdot(-2b)\cdot 3\\&=(a-2b+3)\{a^2+(-2b)^2+3^2-a\cdot(-2b)-(-2b)\cdot 3-3\cdot a\}\\&=(a-2b+3)(a^2+4b^2+9+2ab-3a+6b)\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}&81x^4+36x^2y^2+16y^4\\&=(3x)^4+(3x)^2(2y)^2+(2y)^4\\&=\{(3x)^2+3x\cdot 2y+(2y)^2\}\{(3x)^2-3x\cdot 2y+(2y)^2\}\\&=(9x^2+6xy+4y^2)(9x^2-6xy+4y^2)\end{aligned}$$

정답 (1) $(x+2y-2)^2$
(2) $(x-y+2z)(x^2+y^2+4z^2+xy+2yz-2zx)$
(3) $(a-2b+3)(a^2+4b^2+9+2ab-3a+6b)$
(4) $(9x^2+6xy+4y^2)(9x^2-6xy+4y^2)$

돌다리 두드리기

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^2+y^2+4z^2-2xy-4yz+4zx$ (2) $x^4+4x^2y^2+16y^4$

돌다리 두드리기

|답| (1) $(x-y+2z)^2$
(2) $(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

(1) (주어진 식)
$=x^2+y^2+(2z)^2+2\cdot x\cdot(-y)+2\cdot(-y)\cdot 2z+2\cdot 2z\cdot x$
$=(x-y+2z)^2$

(2) (주어진 식) $=x^4+x^2\cdot(2y)^2+(2y)^4$
$=(x^2+2xy+4y^2)(x^2-2xy+4y^2)$

정답 및 풀이 p.501

개념 그대로

유제 02-1

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx$　　(2) $9a^2+b^2+4c^2-6ab-4bc+12ca$

(1) $x^2+y^2+z^2-2xy+2yz-2zx$
$=x^2+(-y)^2+(-z)^2+2\cdot x\cdot(-y)+2\cdot(-y)\cdot(-z)+2\cdot(-z)\cdot x$
$=(x-y-z)^2$

(2) $9a^2+b^2+4c^2-6ab-4bc+12ca$
$=(3a)^2+(-b)^2+(2c)^2+2\cdot 3a\cdot(-b)+2\cdot(-b)\cdot 2c+2\cdot 2c\cdot 3a$
$=(3a-b+2c)^2$

답 (1) $(x-y-z)^2$　(2) $(3a-b+2c)^2$

개념 그대로

유제 02-2

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $27a^3-8b^3+c^3+18abc$　　(2) $8x^3-y^3+24xy+64$

(1) $27a^3-8b^3+c^3+18abc$
$=(3a)^3+(-2b)^3+c^3-3\cdot 3a\cdot(-2b)\cdot c$
$=(3a-2b+c)\{(3a)^2+(-2b)^2+c^2$
$-3a\cdot(-2b)-(-2b)\cdot c-c\cdot 3a\}$
$=(3a-2b+c)(9a^2+4b^2+c^2+6ab+2bc-3ca)$

(2) $8x^3-y^3+24xy+64$
$=(2x)^3+(-y)^3+4^3-3\cdot(2x)\cdot(-y)\cdot 4$
$=(2x-y+4)\{(2x)^2+(-y)^2+4^2$
$-(2x)\cdot(-y)-(-y)\cdot 4-4\cdot(2x)\}$
$=(2x-y+4)(4x^2+y^2+2xy-8x+4y+16)$

답 (1) $(3a-2b+c)(9a^2+4b^2+c^2+6ab+2bc-3ca)$
(2) $(2x-y+4)(4x^2+y^2+2xy-8x+4y+16)$

개념 더하기

유제 02-3

+ 미정계수법(p.52)

다항식 $x^4+9x^2y^2+81y^4$이 $(x^2+axy+9y^2)(x^2+bxy+9y^2)$로 인수분해될 때, 두 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하시오.

주어진 식을 인수분해하면

$$x^4+9x^2y^2+81y^4=x^4+x^2\cdot(3y)^2+(3y)^4$$
$$=(x^2+3xy+9y^2)(x^2-3xy+9y^2)$$

이므로 계수를 비교하면 $a=3$, $b=-3$ 또는 $a=-3$, $b=3$이다. 따라서 구하는 값은 $ab=-9$이다.

답 -9

03-2 복잡한 식의 인수분해

치환을 이용한 인수분해

다항식을 인수분해할 때 앞서 배운 공식을 직접 이용할 수 없는 경우 다항식을 적절히 변형하면 인수분해 공식을 이용할 수 있다.

공통부분이 있으면 치환한다.

공통부분이 있는 식의 인수분해는 공통부분을 하나의 문자로 치환하고 그 문자에 대하여 인수분해하면 편리하다. 다항식

$$(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3$$

은 공통부분 x^2-2x가 있으므로 다음과 같이 인수분해할 수 있다.

$$\begin{aligned}&(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3\\&=X^2-2X-3=(X+1)(X-3) && \leftarrow x^2-2x=X\text{로 치환하고 인수분해한다.}\\&=(x^2-2x+1)(x^2-2x-3) && \leftarrow X\text{에 } x^2-2x\text{를 다시 대입한다.}\\&=(x-1)^2(x+1)(x-3) && \leftarrow x\text{에 대하여 인수분해한다.}\end{aligned}$$

치환을 이용한 인수분해의 주의점

- 인수분해한 결과에 치환한 문자가 있으면 안 된다.
- 치환한 문자에 원래의 공통부분을 대입한 다음 한 번 더 인수분해가 가능한 지 확인한다.

공통부분이 나오도록 식을 변형한다.

다항식 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-3$은 네 개의 일차식의 곱과 상수항의 합으로 이루어져 있고 겉보기에 공통부분은 없다. 이 다항식을 전개하면

$$x^4+10x^3+35x^2+50x+21$$

이며 인수분해 공식을 직접 이용하여 인수분해하기 매우 어렵다. 그러나 식을 적절히 변형하면 인수분해 공식을 적용할 수 있는 꼴이 된다.

$$\begin{aligned}&(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-3\\&=(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-3 && \leftarrow \text{상수항의 합이 같아지도록 항의 순서를 바꾼다.}\\&=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-3 && \leftarrow \text{짝지은 일차식끼리 전개한다.}\\&=(X+4)(X+6)-3 && \leftarrow x^2+5x=X\text{로 치환한다.}\\&=X^2+10X+21=(X+3)(X+7) && \leftarrow X\text{에 대하여 전개한 다음 인수분해한다.}\\&=(x^2+5x+3)(x^2+5x+7) && \leftarrow X\text{에 } x^2+5x\text{를 대입한다.}\end{aligned}$$

복이차식의 인수분해

ax^4+bx^2+c와 같이 짝수차항만 있는 사차식을 복이차식이라 한다. $x^2=X$로 치환하면 복이차식은 $ax^4+bx^2+c=aX^2+bX+c$와 같이 X에 대한 이차식이 되어 인수분해 공식을 이용할 수 있다. 다항식 x^4-5x^2+4를 인수분해해 보자.

$$x^4-5x^2+4$$
$$=X^2-5X+4 \qquad \leftarrow x^2=X\text{로 치환한다.}$$
$$=(X-1)(X-4) \qquad \leftarrow X\text{에 대하여 인수분해한다.}$$
$$=(x^2-1)(x^2-4) \qquad \leftarrow X\text{에 } x^2\text{을 대입한다.}$$
$$=(x+1)(x-1)(x+2)(x-2) \qquad \leftarrow x\text{에 대하여 인수분해한다.}$$

한편 $x^2=X$로 치환하여 X에 대한 이차식은 만들었지만 인수분해가 어려운 경우가 종종 있다. 이 경우에는 x에 대한 이차항을 적당히 분리하여 A^2-B^2의 꼴로 만들어 인수분해한다.

다항식 x^4+5x^2+9를 인수분해해보자. $x^2=X$로 치환하면 X^2+5X+9이지만 인수분해가 되지 않는다. 이제 이차항 $5x^2$을 $6x^2-x^2$으로 분리하면 다음과 같이 A^2-B^2의 꼴이 되어 인수분해가 된다.

$$x^4+5x^2+9$$
$$=(x^4+6x^2+9)-x^2 \qquad \leftarrow 5x^2=6x^2-x^2\text{으로 분리한다.}$$
$$=(x^2+3)^2-x^2 \qquad \leftarrow A^2-B^2\text{의 꼴을 만든다.}$$
$$=(x^2+3-x)(x^2+3+x) \qquad \leftarrow x\text{에 대하여 인수분해한다.}$$
$$=(x^2-x+3)(x^2+x+3) \qquad \leftarrow x\text{에 대하여 내림차순으로 정리한다.}$$

포인트 상 3.5

치환을 이용한 인수분해

- **공통부분이 있는 경우** 공통부분을 한 문자로 치환하여 인수분해한다.
- **공통부분이 없는 경우** 식을 적절히 변형하거나 전개하여 공통부분을 만들고 한 문자로 치환하여 인수분해한다.
- **복이차식** $x^2=X$로 치환하여 인수분해한다. $x^2=X$로 치환해도 바로 인수분해되지 않으면 이차항을 적당히 분리하여 A^2-B^2의 꼴로 변형한 뒤 인수분해한다.

보기 3.8 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $(x-1)^2+3(x-1)+2$　　(2) $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)+21$

(3) x^4+3x^2-4　　(4) x^4+3x^2+4

보기 정답

3.8 (1) $x(x+1)$
(2) $(x^2+x-5)(x^2+x-9)$
(3) $(x-1)(x+1)(x^2+4)$
(4) $(x^2-x+2)(x^2+x+2)$

여러 문자를 포함한 식의 인수분해

두 개 이상의 문자를 포함한 복잡한 다항식을 인수분해할 때에는 한 문자에 대하여 **내림차순으로 정리**(p.16)하여 인수분해할 수 있다. 특히 **차수**(p.14)가 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리하면 인수분해가 수월하다.

다항식 $x^2+3xy+5x+3y+4$를 인수분해할 때 x에 대하여 내림차순으로 정리한 다음 인수분해할 수도 있다.

$$\begin{aligned} &x^2+3xy+5x+3y+4 \\ &=x^2+(3y+5)x+3y+4 \\ &=(x+1)(x+3y+4) \end{aligned}$$

다항식 $x^2+3xy+5x+3y+4$를 인수분해해보자. 이 다항식은 x에 대한 이차식이고 y에 대한 일차식이므로 y에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.

$$x^2+3xy+5x+3y+4=(3x+3)y+x^2+5x+4$$
$$=3(x+1)y+(x+1)(x+4)=(x+1)(x+3y+4)$$

모든 문자의 차수가 같은 경우, 임의의 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리하고 인수분해한다. 다항식 $ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)$는 a, b, c 각각의 문자에 대하여 모두 이차식이므로 a에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.

$$ab(a-b)+bc(b-c)+ca(c-a)=(b-c)a^2+(-b^2+c^2)a+bc(b-c)$$
$$=(b-c)a^2-(b-c)(b+c)a+bc(b-c)=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$$
$$=(b-c)(a-b)(a-c)=-(a-b)(b-c)(c-a)$$

포인트 상 3.6 **여러 문자를 포함한 식의 인수분해**

- **각 문자에 대한 차수가 다른 경우** 차수가 가장 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해한다.
- **각 문자에 대한 차수가 같은 경우** 임의의 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한 뒤 인수분해한다.

보기 3.9 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $-b^3+ab^2+bc^2-ac^2$ (2) $x^2-xy-2x-2y^2+7y-3$

인수정리를 이용한 인수분해

인수정리를 이용하여 다항식을 인수분해하는 방법에 대하여 알아보자. 다항식 $P(x)$에 대하여 $P(\alpha)=0$이 되는 α를 찾으면 **인수정리**(p.61)에 의하여 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$로 나타낼 수 있다. 실제로 **조립제법**(p.63)을 통해 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$가 더 이상 인수분해되지 않을 때까지 인수분해한다.

보기 정답

3.9 (1) $(a-b)(b-c)(b+c)$
(2) $(x-2y+1)(x+y-3)$

다항식 x^3-3x^2-6x+8을 인수정리를 이용하여 인수분해해보자. $P(x)=x^3-3x^2-6x+8$이라 두면 $P(1)=1^3-3\cdot1^2-6\cdot1+8=0$이므로 인수정리(p.61)에 의하여 다항식 $P(x)$는 $x-1$로 나누어떨어지며 $P(x)=(x-1)Q(x)$이다. 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & -3 & -6 & 8 \\ & & 1 & -2 & -8 \\ \hline & 1 & -2 & -8 & \multicolumn{1}{|c}{0} \end{array}$$

에서 $Q(x)=x^2-2x-8=(x+2)(x-4)$이므로 $P(x)$는

$$P(x)=(x-1)(x+2)(x-4)$$

와 같이 인수분해된다.

포인트 상 3.7 **인수정리를 이용한 인수분해**

- 다항식 $P(x)$에 대하여 $P(\alpha)=0$이 되는 α를 찾는다.
- 조립제법을 이용하여 다항식 $P(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때의 몫 $Q(x)$를 구하여 $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$의 꼴로 만든다.
- 다항식 $Q(x)$가 더 이상 인수분해되지 않을 때까지 위의 방법을 계속한다.

보기 3.10 다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^3+4x^2+x-6　　　(2) $x^4+x^3-x^2+x-2$

$P(\alpha)=0$인 α를 찾는 방법

인수정리를 이용하여 다항식 $P(x)$를 인수분해하려면 먼저 $P(\alpha)=0$을 만족하는 α를 찾아야 한다. $0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ldots$의 값을 차례로 x에 대입하여 α의 값을 찾기에 매우 비효율적이고 α가 정수가 된다는 보장이 없기 때문에 그다지 좋은 방법은 아니다. 실제로

$$P(x)=30x^3-11x^2-18x+8=(2x-1)(3x-2)(5x+4)$$

에서 $P(\alpha)=0$을 만족하는 정수 α가 없다.

포인트 상 3.8 **$P(\alpha)=0$인 α를 찾는 방법**

계수가 정수인 다항식 $P(x)$에서 $P(\alpha)=0$을 만족하는 α의 값은 일반적으로

$$\pm\frac{\text{상수항의 양의 약수}}{\text{최고차항의 계수의 양의 약수}}$$

중에서 찾는다.

예시 다항식 $P(x)=2x^3+3x^2-8x+3$에서

최고차항의 계수의 양의 약수 $=1,\ 2$

상수항의 약수 $=1,\ 3$

이므로 $P(\alpha)=0$을 만족하는 α는 오른쪽 표에 있는 8개의 값 중에 있다. 실제로 α의 값을 찾아보면 $P(1)=P(-3)=P\left(\frac{1}{2}\right)=0$이다.

최고차 \ 상수	1	3
1	±1	±3
2	$\pm\frac{1}{2}$	$\pm\frac{3}{2}$

α를 찾는 순서
$P(\alpha)$의 계산을 간편히 하기 위해 절댓값이 작은 정수부터 대입하여 계산한 다음 분수꼴의 값을 대입한다.

보기 정답

3.10 (1) $(x-1)(x+2)(x+3)$
(2) $(x-1)(x+2)(x^2+1)$

치환을 이용한 인수분해

예제 03

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $(x^2+3x)(x^2+3x+1)-2$ (2) $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+1$

(3) $4a^4-5a^2b^2+b^4$ (4) $x^4+2x^2y^2+9y^4$

길잡이 치환을 이용한 인수분해는

- 공통부분이 있으면 공통부분을 한 문자로 치환한다.
- 겉보기에 공통부분이 없으면 식을 변형하여 공통부분을 만든다.
- 복이차식은 $x^2=X$로 치환한다. 치환하여도 인수분해가 어려운 경우에는 A^2-B^2의 꼴로 식을 변형한다.

풀 이

(1) 주어진 식에서 $x^2+3x=X$로 치환하여 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=X(X+1)-2=X^2+X-2=(X-1)(X+2)\\&=(x^2+3x-1)(x^2+3x+2)=(x^2+3x-1)(x+1)(x+2)\end{aligned}$$

(2) 주어진 식에서 공통부분이 생기도록 항의 순서를 바꾸면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(x-1)(x-4)(x-2)(x-3)+1\\&=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+1\\&=(X+4)(X+6)+1=X^2+10X+25 \qquad (x^2-5x=X\text{로 치환})\\&=(X+5)^2=(x^2-5x+5)^2\end{aligned}$$

(3) 주어진 식에서 $a^2=A$, $b^2=B$로 치환하고 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=4A^2-5AB+B^2=(A-B)(4A-B)\\&=(a^2-b^2)(4a^2-b^2)=(a+b)(a-b)(2a+b)(2a-b)\end{aligned}$$

(4) 이차항을 $2x^2y^2=6x^2y^2-4x^2y^2$으로 분리하여 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(x^4+6x^2y^2+9y^4)-4x^2y^2=(x^2+3y^2)^2-(2xy)^2\\&=(x^2+3y^2+2xy)(x^2+3y^2-2xy)\\&=(x^2+2xy+3y^2)(x^2-2xy+3y^2)\end{aligned}$$

정답 (1) $(x+1)(x+2)(x^2+3x-1)$
(2) $(x^2-5x+5)^2$
(3) $(a+b)(a-b)(2a+b)(2a-b)$
(4) $(x^2+2xy+3y^2)(x^2-2xy+3y^2)$

- 치환을 이용한 인수분해(p.89)
- 인수분해 공식 I(p.81)

돌다리 두드리기

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $(2x-1)^4-13(2x-1)^2+36$ (2) $a^4+9a^2b^2+25b^4$

돌다리 두드리기

|답| (1) $4(x+1)(x-2)(2x+1)(2x-3)$
(2) $(a^2+ab+5b^2)(a^2-ab+5b^2)$

(1) $(2x-1)^2=X$로 치환하면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(X-9)(X-4)\\&=(4x^2-4x-8)(4x^2-4x-3)\\&=4(x+1)(x-2)(2x+1)(2x-3)\end{aligned}$$

(2) $9a^2b^2=10a^2b^2-a^2b^2$으로 분리하면

$$\begin{aligned}a^4+9a^2b^2+25b^4&=(a^4+10a^2b^2+25b^4)-a^2b^2\\&=(a^2+5b^2)^2-(ab)^2=(a^2+ab+5b^2)(a^2-ab+5b^2)\end{aligned}$$

정답 및 풀이 p.501

개념 그대로

유제 03-1

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $(x+1)^4-5(x+1)^2+4$ (2) $x(x+2)(x+4)(x+6)-20$

(1) 주어진 식에서 $(x+1)^2=X$로 치환하여 인수분해하면 다음과 같다.

(주어진 식) $=X^2-5X+4=(X-1)(X-4)$

$=\{(x+1)^2-1\}\{(x+1)^2-4\}$

$=\{(x+1)+1\}\{(x+1)-1\}\{(x+1)+2\}\{(x+1)-2\}$

$=(x+2)x(x+3)(x-1)=x(x-1)(x+2)(x+3)$

(2) 주어진 식에서 공통부분이 생기도록 항의 순서를 바꾸면

(주어진 식) $=x(x+6)(x+2)(x+4)-20$

$=(x^2+6x)(x^2+6x+8)-20$

이다. 이 식에서 $x^2+6x=X$로 치환하여 인수분해하면 다음과 같다.

$(x^2+6x)(x^2+6x+8)-20$

$=X^2+8X-20=(X-2)(X+10)$

$=(x^2+6x-2)(x^2+6x+10)$

답 (1) $x(x-1)(x+2)(x+3)$
(2) $(x^2+6x-2)(x^2+6x+10)$

개념 그대로

유제 03-2

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $a^4-10a^2b^2+9b^4$ (2) $4x^4-17x^2+4$

(1) 주어진 식에서 $a^2=A$, $b^2=B$로 치환하여 인수분해하면 다음과 같다.

(주어진 식) $=A^2-10AB+9B^2=(A-B)(A-9B)$

$=(a^2-b^2)(a^2-9b^2)$

$=(a+b)(a-b)(a+3b)(a-3b)$

(2) 주어진 식의 이차항을 $-17x^2=-8x^2-9x^2$으로 분리하여 인수분해하면 다음과 같다.

(주어진 식) $=(2x^2-2)^2-(3x)^2$

$=(2x^2+3x-2)(2x^2-3x-2)$

$=(2x-1)(x+2)(2x+1)(x-2)$

$=(x+2)(x-2)(2x+1)(2x-1)$

답 (1) $(a+b)(a-b)(a+3b)(a-3b)$
(2) $(x+2)(x-2)(2x+1)(2x-1)$

개념 바꾸기

유제 03-3

− 인수분해 공식 I(p.81)
+ 곱셈 공식 I(p.22)

다항식 $(x-1)(x+2)(x-3)(x+4)+k$가 x에 대한 완전제곱의 꼴로 인수분해되기 위한 상수 k의 값을 구하시오.

주어진 식에서 공통부분이 생기도록 항의 순서를 바꾸면

(주어진 식) $=(x-3)(x+4)(x-1)(x+2)+k$

$=(x^2+x-12)(x^2+x-2)+k$

이고 $x^2+x=X$로 치환하고 식을 전개하면

$(x^2+x-12)(x^2+x-2)+k$

$=(X-12)(X-2)+k=X^2-14X+24+k$

이다. 이제 위 식을 완전제곱이 되도록 정리하면

$X^2-14X+24+k=(X-7)^2-25+k$

$=(x^2+x-7)^2-25+k$ ⋯ ㉠

이므로 ㉠이 완전제곱의 꼴이 되기 위한 k는 $-25+k=0$에서 $k=25$이다.

답 25

여러 문자를 포함한 인수분해

예제 04 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $(x-1)(x+2)+xy+5y-2y^2$　　(2) $x^3y+x^2z-xy^2-yz$

(3) $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

길잡이 여러 개의 문자를 포함한 식의 인수분해는

- 차수가 낮은 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.
- 모든 문자의 차수가 같으면 어느 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리하여 인수분해한다.

풀이

(1) 주어진 식은 x에 대한 이차식, y에 대한 이차식이므로 x에 대하여 내림차순으로 정리하고 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= (x^2+x-2)+xy+5y-2y^2\\ &= x^2+(y+1)x-2y^2+5y-2\\ &= x^2+(y+1)x-(2y-1)(y-2)\\ &= \{x-(y-2)\}\{x+(2y-1)\}\\ &= (x-y+2)(x+2y-1)\end{aligned}$$

(2) 주어진 식은 x에 대한 삼차식, y에 대한 이차식, z에 대한 일차식이므로 차수가 가장 낮은 z에 대하여 내림차순으로 정리하고 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= (x^2-y)z+x^3y-xy^2 = (x^2-y)z+xy(x^2-y)\\ &= (x^2-y)(xy+z)\end{aligned}$$

(3) 주어진 식은 a에 대한 이차식, b에 대한 이차식, c에 대한 이차식이므로 a에 대하여 내림차순으로 정리하고 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b+2abc\\ &= (b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)\\ &= (b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}\\ &= (b+c)(a+b)(a+c) = (a+b)(b+c)(c+a)\end{aligned}$$

정답 (1) $(x-y+2)(x+2y-1)$
(2) $(x^2-y)(xy+z)$
(3) $(a+b)(b+c)(c+a)$

- 여러 문자를 포함한 식의 인수분해(p.90)
- 인수분해 공식 I(p.81)
- 다항식의 정리(p.16)

돌다리 두드리기

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $(x+1)(x+3)+2xy+4y+y^2$　　(2) $(a-b)c^2+(b-c)a^2+(c-a)b^2$

돌다리 두드리기

|답| (1) $(x+y+1)(x+y+3)$
(2) $-(a-b)(b-c)(c-a)$

(1) 주어진 식을 y에 대하여 내림차순으로 정리하고 인수분해하면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= y^2+(2x+4)y+(x+1)(x+3)\\ &= (x+y+1)(x+y+3)\end{aligned}$$

(2) 주어진 식을 a에 대하여 내림차순으로 정리하고 인수분해하면

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식}) &= (b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2\\ &= (b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\ &= (b-c)(a-b)(a-c) = -(a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

정답 및 풀이 p.502

개념 그대로

유제 04-1

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $2a^2+2b^2+5ab+3a+3b+1$ (2) $x^2+xy^2-xy+2x-y^3-2y$

(1) 주어진 식은 a에 대한 이차식, b에 대한 이차식이므로 a에 대하여 내림차순으로 정리하고 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=2a^2+(5b+3)a+2b^2+3b+1\\&=2a^2+(5b+3)a+(b+1)(2b+1)\\&=(a+2b+1)(2a+b+1)\end{aligned}$$

(2) 주어진 식은 x에 대한 이차식, y에 대한 삼차식이므로 차수가 가장 낮은 x에 대하여 내림차순으로 정리하고 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=x^2+(y^2-y+2)x-y^3-2y\\&=x^2+(y^2-y+2)x+(-y)(y^2+2)\\&=(x-y)(x+y^2+2)\end{aligned}$$

답 (1) $(a+2b+1)(2a+b+1)$
(2) $(x-y)(x+y^2+2)$

개념 그대로

유제 04-2

$a^2b-a^2c+b^3-b^2c+bc^2-c^3$을 인수분해하시오.

주어진 식은 a에 대한 이차식, b와 c에 대한 삼차식이므로 차수가 가장 낮은 a에 대하여 내림차순으로 정리하고 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}(\text{주어진 식})&=(b-c)a^2+b^3-b^2c+bc^2-c^3\\&=(b-c)a^2+(b-c)b^2+(b-c)c^2\\&=(b-c)(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

답 $(b-c)(a^2+b^2+c^2)$

개념 그대로

유제 04-3

다항식 $a(b+c)^2+b(c+a)^2+c(a+b)^2-4abc$를 인수분해하시오.

주어진 식은 a, b, c에 대한 삼차식이므로 전개하여 a에 대한 내림차순으로 정리하고 인수분해하면 다음과 같다.

(주어진 식)

$$\begin{aligned}&=ab^2+2abc+ac^2+bc^2+2abc+a^2b+a^2c+2abc+b^2c-4abc\\&=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+b^2c+bc^2\\&=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)\\&=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}\\&=(b+c)(a+b)(a+c)=(a+b)(b+c)(c+a)\end{aligned}$$

답 $(a+b)(b+c)(c+a)$

예제 05 다음 식을 인수분해하시오.

(1) $2a^3+a^2+a-1$　　(2) $x^4-3x^3-3x^2+11x-6$

길잡이 계수가 정수인 다항식 $P(x)$에서 $P(\alpha)=0$을 만족하는 α의 값은

$$\pm\frac{\text{상수항의 양의 약수}}{\text{최고차항의 계수의 양의 약수}}$$

중에서 찾을 수 있다.

(1) 최고차항의 계수가 2이고, 상수항이 -1이므로 ±1, $\pm\frac{1}{2}$ 중에 $P(\alpha)=0$을 만족하는 α가 있다.

(2) 최고차항의 계수가 1이고, 상수항이 -6이므로 ±1, ±2, ±3, ±6 중에 $P(\alpha)=0$을 만족하는 α가 있다.

- 인수정리를 이용한 인수분해(p.91)
- 인수분해 공식 I(p.81)
- 조립제법(p.63)
- 인수정리(p.61)

풀이

(1) $P(a)=2a^3+a^2+a-1$로 놓으면 $P\left(\frac{1}{2}\right)=0$이므로 $a-\frac{1}{2}$은 $P(a)$의 인수이다.

$P(a)$를 $a-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫을 $Q(a)$라 하자. 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하면 $Q(a)=2a^2+2a+2$이므로 $P(a)$를 인수분해하면 다음과 같다.

$\frac{1}{2}$	2	1	1	-1
		1	1	1
	2	2	2	0

$$P(a)=\left(a-\frac{1}{2}\right)Q(a)=\left(a-\frac{1}{2}\right)(2a^2+2a+2)=(2a-1)(a^2+a+1)$$

(2) $P(x)=x^4-3x^3-3x^2+11x-6$으로 놓으면

$$P(1)=0,\quad P(3)=0$$

이므로 $x-1$과 $x-3$은 $P(x)$의 인수이다. $P(x)$를 $(x-1)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하자. 오른쪽과 같이 조립제법을 이용하면 $Q(x)=x^2+x-2$이다. 따라서 주어진 식을 인수분해하면 다음과 같다.

1	1	-3	-3	11	-6
		1	-2	-5	-6
3	1	-2	-5	6	0
		3	3	-6	
	1	1	-2	0	

$$\begin{aligned}P(x)&=(x-1)(x-3)Q(x)=(x-1)(x-3)(x^2+x-2)\\&=(x-1)(x-3)(x+2)(x-1)=(x-1)^2(x+2)(x-3)\end{aligned}$$

정답 (1) $(2a-1)(a^2+a+1)$
(2) $(x-1)^2(x+2)(x-3)$

돌다리 두드리기

다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^3-7x+6　　(2) $x^4+5x^3+7x^2+x-2$

(1) $P(x)=x^3-7x+6$일 때, $P(1)=0$이므로
$P(x)=(x-1)(x^2+x-6)=(x-1)(x-2)(x+3)$이다.

1	1	0	-7	6
		1	1	-6
	1	1	-6	0

(2)

-1	1	5	7	1	-2
		-1	-4	-3	2
-2	1	4	3	-2	0
		-2	-4	2	
	1	2	-1	0	

이므로 $P(x)=(x+1)(x+2)(x^2+2x-1)$이다.

돌다리 두드리기

|답| (1) $(x-1)(x-2)(x+3)$
(2) $(x+1)(x+2)(x^2+2x-1)$

정답 및 풀이 p.502

개념 그대로

유제 05-1

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $x^3+6x^2+11x+6$　　(2) $2a^4+a^3+4a^2+4a+1$

(1) $P(x)=x^3+6x^2+11x+6$으로 놓으면 $P(-1)=0$이므로 $x+1$은 $P(x)$의 인수이다. $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하자.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 6 & 11 & 6 \\ & & -1 & -5 & -6 \\ \hline & 1 & 5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

조립제법을 이용하면 $Q(x)=x^2+5x+6$이므로

$$\begin{aligned} P(x)&=(x+1)Q(x)=(x+1)(x^2+5x+6) \\ &=(x+1)(x+2)(x+3) \end{aligned}$$

(2) $P(a)=2a^4+a^3+4a^2+4a+1$로 놓으면 $P\left(-\frac{1}{2}\right)=0$이므로 $a+\frac{1}{2}$은 $P(a)$의 인수이다. $P(a)$를 $a+\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫을 $Q(a)$라 하자.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -\frac{1}{2} & 2 & 1 & 4 & 4 & 1 \\ & & -1 & 0 & -2 & -1 \\ \hline & 2 & 0 & 4 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

조립제법을 이용하면 $Q(a)=2a^3+4a+2$이므로

$$\begin{aligned} P(a)&=\left(a+\frac{1}{2}\right)Q(a)=\left(a+\frac{1}{2}\right)(2a^3+4a+2) \\ &=(2a+1)(a^3+2a+1) \end{aligned}$$

답 (1) $(x+1)(x+2)(x+3)$
(2) $(2a+1)(a^3+2a+1)$

개념 그대로

유제 05-2

x에 대한 다항식 $3x^3+5x^2-4x+a$가 $(x-1)(x+b)(3x+c)$로 인수분해될 때, 상수 a, b, c의 값을 각각 구하시오.

주어진 다항식을 $P(x)=3x^3+5x^2-4x+a$라 하자. $P(x)$는 $x-1$을 인수로 가지므로 인수정리에 의하여 $P(1)=0$이다. 따라서

$$P(1)=3+5-4+a=0 \quad \Rightarrow \quad a=-4$$

이다. $P(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 3 & 5 & -4 & -4 \\ & & 3 & 8 & 4 \\ \hline & 3 & 8 & 4 & \boxed{0} \end{array}$$

에서 $Q(x)=3x^2+8x+4$이므로 주어진 식을 인수분해하면

$$P(x)=(x-1)(3x^2+8x+4)=(x-1)(x+2)(3x+2)$$

이고 $b=2$, $c=2$이다. 따라서 구하는 값은 $a=-4$, $b=2$, $c=2$이다.

답 $a=-4$, $b=2$, $c=2$

개념 그대로

유제 05-3

x에 대한 다항식 x^4+ax^2+b를 인수분해하면 $(x-1)^2(x-p)^2$이다. 이때 상수 p의 값을 구하시오.

주어진 다항식을 $P(x)=x^4+ax^2+b$라 하자. $(x-1)^2$을 인수로 가지므로 인수정리에 의하여 $P(1)=0$이다. 따라서

$$P(1)=1+a+b=0 \quad \Rightarrow \quad b=-a-1$$

이다. $P(x)$를 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하고 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & a & 0 & -a-1 \\ & & 1 & 1 & a+1 & a+1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & a+1 & a+1 & \boxed{0} \\ & & 1 & 2 & a+3 & \\ \hline & 1 & 2 & a+3 & \boxed{2a+4} & \end{array}$$

에서 $2a+4=0$이므로 $a=-2$이다. 따라서

$$P(x)=(x-1)^2(x^2+2x+1)=(x-1)^2(x+1)^2$$

이므로 구하는 값은 $p=-1$이다.

답 -1

예제 06

다음 물음에 답하시오.

(1) $\dfrac{101^3-99^3}{101^2+101\cdot99+99^2}$의 값을 구하시오.

(2) 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여

$$a^2b-a^2c+ab^2-ac^2+b^2c-bc^2=0$$

이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 구하시오.

길잡이

(1) 복잡한 수의 계산은 직접 계산하는 것보다 수를 적당한 문자로 치환한 다음 인수분해를 하고, 다시 수를 대입하여 계산한다.

(2) 삼각형 문제는 인수분해한 다음 세 변이 모두 양수라는 것을 이용하여 조건을 간단히 할 수 있다.

- 여러 문자를 포함한 식의 인수분해(p.90)
- 치환을 이용한 인수분해(p.89)
- 인수분해 공식 II(p.82)
- 인수분해 공식 I(p.81)

풀 이

(1) $101=x$, $99=y$로 치환하고 인수분해하면

$$\frac{101^3-99^3}{101^2+101\cdot99+99^2}=\frac{x^3-y^3}{x^2+xy+y^2}=\frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x^2+xy+y^2)}=x-y$$

이다. 따라서 구하는 값은 $x-y=101-99=2$이다.

(2) 주어진 등식의 좌변은 a, b, c에 대한 이차식이므로 a에 대하여 내림차순으로 정리하고 인수분해하면

$$\begin{aligned}&a^2b-a^2c+ab^2-ac^2+b^2c-bc^2\\&=(b-c)a^2+(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2\\&=(b-c)a^2+(b-c)(b+c)a+bc(b-c)\\&=(b-c)\{a^2+(b+c)a+bc\}\\&=(b-c)(a+c)(a+b)=0\end{aligned}$$

이다. 세 변의 길이는 양수이므로 $a+b\neq0$, $a+c\neq0$이고 $b=c$이다. 따라서 이 삼각형은 $b=c$인 이등변삼각형이다.

정답 (1) 2 (2) $b=c$인 이등변삼각형

돌다리 두드리기

다음 물음에 답하시오.

(1) $\dfrac{19^3+21^3}{19^2-19\cdot21+21^2}$의 값을 구하시오.

(2) 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $a^2-b^2+bc-ac=0$이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 구하시오.

돌다리 두드리기

|답| (1) 40 (2) $a=b$인 이등변삼각형

(1) $19=x$, $21=y$로 치환하면

$$(\text{주어진 식})=\frac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2}=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{x^2-xy+y^2}=x+y=40$$

(2) 주어진 등식의 좌변을 a에 대하여 내림차순으로 정리하고 인수분해하면

$(\text{주어진 식})=a^2-ca+(-b)\cdot(b-c)=(a-b)(a+b-c)=0$

이고 삼각형의 결정조건에 의해 $a+b>c$이므로 $a=b$인 이등변삼각형이다.

정답 및 풀이 p.503

개념 줄이기

유제 06-1

– 여러 문자를 포함한 식의 인수분해(p.90)

다음 식의 값을 구하시오.

(1) $\dfrac{2018^3+1}{2017\cdot 2018+1}$　　(2) $\dfrac{99^2-1}{99^3-1}\times(99^2+99+1)$

(1) $2018=x$로 치환하면 주어진 식은

$$\frac{2018^3+1}{2017\cdot 2018+1}=\frac{x^3+1}{(x-1)x+1}=\frac{x^3+1}{x^2-x+1}$$

이고 이 식을 인수분해하여 값을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{x^3+1}{x^2-x+1}=\frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}=x+1=2019$$

(2) $99=x$로 치환하면 주어진 식은

$$\frac{99^2-1}{99^3-1}\times(99^2+99+1)=\frac{x^2-1}{x^3-1}\times(x^2+x+1)$$

이고 이 식을 인수분해하여 값을 구하면 다음과 같다.

$$\frac{x^2-1}{x^3-1}\times(x^2+x+1)$$
$$=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}\times(x^2+x+1)=x+1=100$$

답 (1) 2019　(2) 100

개념 줄이기

유제 06-2

– 치환을 이용한 인수분해(p.89)
– 인수분해 공식 II(p.82)

$x=1+\sqrt{2}$이고 $y=1-\sqrt{2}$일 때, $x^3-x^2y-xy^2+y^3$의 값을 구하시오.

주어진 식을 인수분해하면

$$x^3-x^2y-xy^2+y^3=x^2(x-y)-y^2(x-y)$$
$$=(x^2-y^2)(x-y)=(x+y)(x-y)^2$$

이다. 이때 $x+y=2$, $x-y=2\sqrt{2}$이므로 위 식에 대입하면 구하는 값은

$$(x+y)(x-y)^2=2\cdot(2\sqrt{2})^2=16$$

에서 16이다.

답 16

개념 바꾸기

유제 06-3

– 치환을 이용한 인수분해(p.89)
– 인수분해 공식 II(p.82)
– 인수분해 공식 I(p.81)
+ 인수분해 공식 III(p.82)

삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $a^3+b^3+c^3=3abc$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 구하시오.

주어진 등식은

$$a^3+b^3+c^3-3abc=0$$

과 같다. 주어진 등식의 좌변을 정리하여 인수분해 공식을 이용하여 인수분해하면

$$a^3+b^3+c^3-3abc$$
$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=0$$

이다. 이때 삼각형의 세 변의 길이의 합은 0보다 크므로 $a+b+c>0$에서 $a=b$, $b=c$, $c=a$일 때만 주어진 등식을 만족한다. 즉, 세 변의 길이가 각각 a, b, c인 삼각형은 정삼각형이다.

답 정삼각형

03-1 인수분해 공식 [1-5]

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $-4a^2-b^2+4ab+1$ (2) x^5+125x^2

(3) $4x^2+y^2-4xy+4x-2y+1$

(1) **인수분해 공식(p.81)**을 이용하여 주어진 식을 인수분해하면 다음과 같다.

$$-4a^2-b^2+4ab+1=1-(2a-b)^2=\{1-(2a-b)\}\{1+(2a-b)\}$$
$$=(1-2a+b)(1+2a-b)=-(2a-b-1)(2a-b+1)$$

(2) **인수분해 공식(p.82)**을 이용하여 주어진 식을 인수분해하면 다음과 같다.

$$x^5+125x^2=x^2(x^3+5^3)=x^2(x+5)(x^2-5x+25)$$

(3) **인수분해 공식(p.82)**을 이용하여 주어진 식을 인수분해하면 다음과 같다.

$$4x^2+y^2-4xy+4x-2y+1$$
$$=(2x)^2+(-y)^2+1^2+2\cdot2x\cdot(-y)+2\cdot2x\cdot1+2\cdot(-y)\cdot1$$
$$=(2x-y+1)^2$$

답 (1) $-(2a-b-1)(2a-b+1)$
(2) $(a-b)(a^2+b^2+ab+6a+6b+12)$
(3) $(2x-y+1)^2$

03-2

다항식 $27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$을 인수분해한 식이 $(px+qy)^3$일 때, 두 상수 p, q의 값을 각각 구하시오.

인수분해 공식(p.82)을 이용하여 주어진 식을 인수분해하면

$$27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$$
$$=(3x)^3+3\cdot(9x)^2\cdot(-2y)+3\cdot3x\cdot(-2y)^2+(-2y)^3$$
$$=(3x-2y)^3$$

이므로 $p=3$, $q=-2$이다.

답 $p=3$, $q=-2$

03-3

두 다항식 A, B가 $A=5x-2$, $B=x-1$일 때 등식

$$A^3-12A^2B+48AB^2-64B^3=ax^3+bx^2+cx+d$$

를 만족하는 네 상수 a, b, c, d에 대하여 $a-b+c+d$의 값을 구하시오.

인수분해 공식(p.82)에 의하여

$$A^3-12A^2B+48AB^2-64B^3=(A-4B)^3$$

이다. 이때

$$A-4B=(5x-2)-4(x-1)=x+2$$

이므로

$$(A-4B)^3=(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8$$

에서 $a=1$, $b=6$, $c=12$, $d=8$이고, 구하는 값은 다음과 같다.

$$a-b+c+d=1-6+12+8=15$$

답 15

03-4

x^6-1의 인수를 [보기]에서 있는 대로 고르시오.

[보기]

ㄱ. $x+1$ ㄴ. x^2+1

ㄷ. x^4-x^2+1 ㄹ. x^4+x^2+1

인수분해 공식(p.82)을 이용하여 x^6-1을 인수분해하면

$$x^6-1=(x^2-1)(x^4+x^2+1)$$
$$=(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)$$

이므로 $x+1$, x^4+x^2+1은 x^6-1의 인수이고 x^2+1, x^4-x^2+1은 x^6-1의 인수가 아니다. 따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄹ이다.

답 ㄱ, ㄹ

03-5

다항식 $x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$을 인수분해하시오.

인수분해 공식(p.82)을 이용하여 주어진 식을 인수분해하면 다음과 같다.

$$x^4+y^4+z^4+2x^2y^2-2y^2z^2-2z^2x^2$$
$$=(x^2)^2+(y^2)^2+(-z^2)^2+2\cdot x^2\cdot y^2$$
$$+2\cdot y^2\cdot(-z^2)+2\cdot(-z^2)\cdot x^2$$
$$=(x^2+y^2-z^2)^2$$

답 $(x^2+y^2-z^2)^2$

03-6 복잡한 식의 인수분해 [6-12]

다음 식을 인수분해하시오.

(1) $(2x^2+x)^2+(2x^2+x)-2$ (2) $a(a+1)(a-1)(a+2)-15$

(3) $9a^4-7a^2b^2+b^4$ (4) $x^4-2x^3+2x^2-x-6$

(1) $2x^2+x=X$로 **치환하여 인수분해(p.89)**하면 다음과 같다.

$$(2x^2+x)^2+(2x^2+x)-2=X^2+X-2=(X-1)(X+2)$$
$$=(2x^2+x-1)(2x^2+x+2)=(2x-1)(x+1)(2x^2+x+2)$$

(2) 항의 순서를 바꾼 뒤 공통부분을 $a^2+a=A$로 치환하여 인수분해하면

$$(\text{주어진 식})=a(a+1)(a-1)(a+2)-15$$
$$=(a^2+a)(a^2+a-2)-15=A(A-2)-15$$
$$=(A+3)(A-5)=(a^2+a+3)(a^2+a-5)$$

(3) a^2b^2항을 $-7a^2b^2=-6a^2b^2-a^2b^2$으로 분리하면

$$(\text{주어진 식})=9a^4-6a^2b^2+b^4-a^2b^2=(3a^2-b^2)^2-(ab)^2$$
$$=(3a^2+ab-b^2)(3a^2-ab-b^2)$$

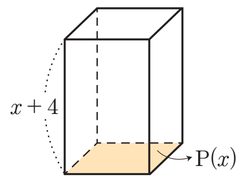
(4) $P(x)=x^4-2x^3+2x^2-x-6$으로 놓으면 $P(-1)=0$, $P(2)=0$이므로 $x+1$, $x-2$는 $P(x)$의 **인수(p.91)**이다. **조립제법(p.63)**을 이용하면

$$P(x)=(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$$

답 (1) $(2x-1)(x+1)(2x^2+x+2)$
(2) $(a^2+a+3)(a^2+a-5)$
(3) $(3a^2+ab-b^2)(3a^2-ab-b^2)$
(4) $(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$

03-7

그림과 같이 높이가 $x+4$이고 부피가 x^3+5x^2+ax-8인 직육면체가 있다. 직육면체의 밑넓이를 $P(x)$라 할 때, $P(x)$를 두 일차식의 곱으로 나타내시오.



직육면체의 부피를 $f(x)=x^3+5x^2+ax-8$로 놓으면

$$f(x)=(x+4)P(x)$$

로 나타낼 수 있다. 이때, **인수정리(p.61)**에 의하여 $f(-4)=0$이므로

$$(-4)^3+5\cdot(-4)^2+a\cdot(-4)-8=0 \quad \Rightarrow \quad 8-4a=0$$

에서 $a=2$이다. 즉, $f(x)=x^3+5x^2+2x-8$이고 **조립제법(p.63)**을 이용하여 $f(x)$를 **인수분해(p.91)**하면 $f(x)=(x+4)(x+2)(x-1)$로 나타낼 수 있다. 따라서 $P(x)=(x+2)(x-1)$이다.

답 $(x+2)(x-1)$

03-8

다항식 $x^2+y^2-2xy-3x+3y+2$가 두 x, y에 대한 두 일차식의 곱 $(x+ay+b)(x+cy+d)$로 인수분해될 때, 상수 a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하시오.

주어진 식을 x에 대한 **내림차순으로 정리(p.16)**하여 **인수분해(p.90)**하면

$$\begin{aligned} & x^2+y^2-2xy-3x+3y+2 \\ &= x^2-(2y+3)x+y^2+3y+2 \\ &= x^2-(2y+3)x+(y+1)(y+2) \\ &= \{x-(y+1)\}\{x-(y+2)\} \\ &= (x-y-1)(x-y-2) \end{aligned}$$

이다. 따라서 $a=-1$, $b=-1$, $c=-1$, $d=-2$ 또는 $a=-1$, $b=-2$, $c=-1$, $d=-1$이므로 구하는 값은 $a+b+c+d=-5$이다.

답 -5

03-9

어떤 직사각형의 넓이가 x^3-x^2-x-2로 주어져 있다. 직사각형의 가로의 길이는 최고차항의 계수가 1이고 계수가 모두 유리수인 이차식이고, 세로의 길이는 최고차항의 계수가 1이고 계수가 모두 유리수인 일차식일 때, 이 직사각형의 둘레의 길이를 구하시오.

이 직사각형의 넓이를 $P(x)=x^3-x^2-x-2$로 놓으면 $P(2)=0$이므로 $x-2$는 $P(x)$의 **인수(p.61)**이다. $P(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때, **조립제법(p.63)**을 이용하면

2	1	-1	-1	-2
		2	2	2
	1	1	1	0

에서 $Q(x)=x^2+x+1$이므로 $P(x)$를 **인수분해(p.91)**하면

$$P(x)=(x-2)Q(x)=(x-2)(x^2+x+1)$$

이다. 따라서 직사각형의 가로의 길이는 x^2+x+1이고, 세로의 길이는 $x-2$이므로 구하는 직사각형의 둘레의 길이는

$$2(x^2+x+1)+2(x-2)=2x^2+4x-2$$

답 $2x^2+4x-2$

03-10

$15\times17\times19\times21+15=(n+5)(n+7)$을 만족하는 자연수 n의 값을 구하시오.

$15=x$로 놓으면 주어진 식은

$$\begin{aligned} & 15\times17\times19\times21+15 \\ &= x(x+2)(x+4)(x+6)+15 \\ &= \{x(x+6)\}\{(x+2)(x+4)\}+15 \\ &= (x^2+6x)(x^2+6x+8)+15 \end{aligned}$$

이고 $x^2+6x=X$로 **치환(p.89)**하면

$$\begin{aligned} & (x^2+6x)(x^2+6x+8)+15=X(X+8)+15 \\ &= X^2+8X+15=(X+3)(X+5) \\ &= (x^2+6x+3)(x^2+6x+5)=(n+5)(n+7) \end{aligned}$$

이다. 이때

$$n+5=x^2+6x+3 \quad \Rightarrow \quad n=x^2+6x-2$$

이므로 $n=15^2+6\cdot15-2=313$이다.

답 313

03-11

$f(x)=x^4-8x^3-8x^2+8x+7$일 때, 인수분해를 이용하여 $f(9)$의 값을 구하시오.

$f(x)$에 대하여 $f(1)=0$, $f(-1)=0$이므로 $x-1$와 $x+1$은 $f(x)$의 **인수(p.61)**이다. $f(x)$를 $(x+1)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 할 때 **조립제법(p.63)**을 이용하면

1	1	-8	-8	8	7
		1	-7	-15	-7
-1	1	-7	-15	-7	0
		-1	8	7	
	1	-8	-7	0	

에서 $Q(x)=x^2-8x-7$이므로 $f(x)$를 **인수분해(p.91)**하면

$$f(x)=(x+1)(x-1)Q(x)=(x+1)(x-1)(x^2-8x-7)$$

이다. 따라서 구하는 값은

$$f(9)=10\cdot8\cdot(81-72-7)=10\cdot8\cdot2=160$$

답 160

03-12

삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여

$$a^3-b^3+a^2b-ab^2+ac^2+bc^2=0$$

일 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 구하시오.

주어진 등식의 좌변을 c에 대하여 **내림차순으로 정리(p.16)**하고 **인수분해(p.90)**하면

$$\begin{aligned} & a^3-b^3+a^2b-ab^2+ac^2+bc^2 \\ &= (a+b)c^2+a^2(a+b)-b^2(a+b) \\ &= (a+b)(a^2-b^2+c^2) \end{aligned}$$

이다. 따라서 주어진 등식은

$$(a+b)(a^2-b^2+c^2)=0$$

이고 이때 $a>0$, $b>0$에서 $a+b\neq0$이므로

$$a^2-b^2+c^2=0 \quad \Rightarrow \quad a^2+c^2=b^2$$

이다. 그러므로 구하는 삼각형은 빗변의 길이가 b인 직각삼각형이다.

답 빗변의 길이가 b인 직각삼각형

03-1

다음 식을 인수분해하시오.

(1) x^8-y^8 (2) x^6-7x^3-8

(1) **인수분해 공식(p.81)**을 이용하여 주어진 식을 인수분해하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}x^8-y^8&=(x^4-y^4)(x^4+y^4)\\&=(x^2-y^2)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\\&=(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)\end{aligned}$$

(2) $x^3=X$로 **치환(p.89)**하여 주어진 식을 X에 대하여 인수분해하면

$$x^6-7x^3-8=X^2-7X-8=(X+1)(X-8)$$

이다. X 대신에 x^3을 대입하고 x에 대하여 **인수분해(p.82)**하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&(X+1)(X-8)=(x^3+1)(x^3-8)\\&=(x+1)(x^2-x+1)(x-2)(x^2+2x+4)\\&=(x+1)(x-2)(x^2-x+1)(x^2+2x+4)\end{aligned}$$

답 (1) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$
(2) $(x+1)(x-2)(x^2-x+1)(x^2+2x+4)$

03-2

다항식 $x^2+xy-2y^2+\alpha x+4y-2$가 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 상수 α의 값을 구하시오.

주어진 식을 x에 대하여 **내림차순으로 정리(p.16)**하면

$$\begin{aligned}&x^2+xy-2y^2+\alpha x+4y-2\\&=x^2+(y+\alpha)x-2y^2+4y-2\\&=x^2+(y+\alpha)x-2(y-1)^2\end{aligned}$$

이고 이 식이 x, y에 대한 일차식으로 **인수분해(p.81)**되어야 한다. 곱이 $-2(y-1)^2$이고 합이 y의 계수가 1인 두 일차식은 $2(y-1)$, $-(y-1)$이다. 따라서

$$y+\alpha=2(y-1)-(y-1)=y-1$$

에서 $\alpha=-1$이다.

답 -1

03-3

세 실수 a, b, c에 대하여 기호 $[a, b, c]$를 $[a, b, c]=a(b^2-c^2)$라 정의할 때, $[a, b, c]+[b, c, a]+[c, a, b]$를 인수분해하시오.

$[a, b, c]$의 정의에 따라

$$\begin{aligned}&[a, b, c]+[b, c, a]+[c, a, b]\\&=a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\end{aligned}$$

이다. 이 식을 a에 대하여 **내림차순으로 정리(p.16)**하여 **인수분해(p.90)**하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}&a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\\&=-\{(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+b^2c-bc^2\}\\&=-\{(b-c)a^2-(b-c)(b+c)a+bc(b-c)\}\\&=-(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}\\&=-(b-c)(a-b)(a-c)=(a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

답 $(a-b)(b-c)(c-a)$

03-4

x에 대한 사차식 $2x^4+ax^2+bx-4$가 $(x-1)(x-2)Q(x)$로 인수분해될 때, $Q(x)$를 구하시오.

$P(x)=2x^4+ax^2+bx-4$라 할 때, $P(x)$는 $x-1$과 $x-2$를 **인수(p.91)**로 가지므로 $P(1)=0$이고 $P(2)=0$이다. 즉,

$$P(1)=2+a+b-4=0 \Rightarrow a+b=2$$
$$P(2)=32+4a+2b-4=0 \Rightarrow 2a+b=-14$$

이고 이 두 식을 연립하여 풀면 $a=-16$, $b=18$이다.

$$P(x)=2x^4-16x^2+18x-4$$

에서 **조립제법(p.63)**을 이용하면

1	2	0	−16	18	−4
		2	2	−14	4
2	2	2	−14	4	0
		4	12	−4	
	2	6	−2	0	

이므로 $P(x)$는

$$P(x)=(x-1)(x-2)(2x^2+6x-2)$$

와 같이 인수분해할 수 있다. 따라서 $Q(x)=2x^2+6x-2$이다.

답 $2x^2+6x-2$

03-5

x에 대한 다항식 x^2+2x-n이 계수가 정수인 두 일차식의 곱으로 인수분해되는 1보다 크고 50보다 작은 자연수 n의 개수를 구하시오.

x에 대한 다항식 x^2+2x-n이 정수 a, b에 대하여

$$x^2+2x-n=(x-a)(x+b)$$

와 같이 **인수분해(p.81)**된다고 하자. 등식의 우변을 전개하면

$$(x-a)(x+b)=x^2+(b-a)x-ab$$

이므로 **계수비교법(p.52)**에 의하여 $2=b-a$이고 $n=ab$임을 알 수 있다.

(i) a, b가 양의 정수일 때, 가능한 a, b와 자연수 n의 값을 표로 만들면 다음과 같다.

a	1	2	3	4	5	6	7
b	3	4	5	6	7	8	9
n	3	8	15	24	35	48	63

(ii) a, b가 음의 정수일 때, 가능한 a, b에 따른 자연수 n의 값은 a, b가 양의 정수일 때와 같다.

(i), (ii)에 의하여 1보다 크고 50보다 작은 자연수 n의 개수는 6이다.

답 6

03-6

다항식 $x^4+2x^3-x^2+2x+1$을 인수분해하시오.

주어진 식을 x^2으로 묶고 $x+\frac{1}{x}$에 대한 식으로 정리하면

$$\begin{aligned}&x^4+2x^3-x^2+2x+1\\&=x^2\left(x^2+2x-1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\\&=x^2\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3\right\}\end{aligned}$$

이다. 이때 $x+\frac{1}{x}=t$로 **치환(p.89)**하면

$$\begin{aligned}&\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-3\\&=t^2+2t-3=(t-1)(t+3)\\&=\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\left(x+\frac{1}{x}+3\right)\end{aligned}$$

이다. 따라서 주어진 식을 인수분해하면 다음과 같다.

$$x^2\left(x+\frac{1}{x}-1\right)\left(x+\frac{1}{x}+3\right)=(x^2-x+1)(x^2+3x+1)$$

답 $(x^2-x+1)(x^2+3x+1)$

03-7

$\dfrac{5^2-7^2+11^2-13^2+17^2-19^2}{15^2-13^2+9^2-7^2+3^2-1}$의 값을 구하시오.

인수분해(p.81)를 이용하여 분자의 식의 값을 구하면

$$\begin{aligned}&5^2-7^2+11^2-13^2+17^2-19^2\\&=(5+7)(5-7)+(11+13)(11-13)+(17+19)(17-19)\\&=-2(12+24+36)=-144\end{aligned}$$

이고 분모의 식의 값을 구하면

$$\begin{aligned}&15^2-13^2+9^2-7^2+3^2-1\\&=(15+13)(15-13)+(9+7)(9-7)+(3+1)(3-1)\\&=2(28+16+4)=96\end{aligned}$$

이다. 따라서 주어진 식의 값은 $\frac{-144}{96}=-\frac{3}{2}$이다.

답 $-\frac{3}{2}$

03-8

삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여

$$(a-b)c^4-2(a^3-b^3)c^2+(a^4-b^4)(a+b)=0$$

이 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인지 구하시오.

주어진 식의 좌변을 c에 대하여 **내림차순으로 정리(p.16)**하면

$$\begin{aligned}&(a-b)c^4-2(a^3-b^3)c^2+(a^4-b^4)(a+b)\\&=(a-b)c^4-2(a-b)(a^2+ab+b^2)c^2\\&\quad+(a+b)^2(a-b)(a^2+b^2)\end{aligned}$$

이다. 공통인수인 $a+b$로 묶은 다음 **인수분해(p.90)**하면

$$\begin{aligned}&(\text{주어진 식})\\&=(a-b)\{c^4-2(a^2+ab+b^2)c^2+(a+b)^2(a^2+b^2)\}\\&=(a-b)\{c^2-(a+b)^2\}\{c^2-(a^2+b^2)\}=0\end{aligned}$$

이다. 이때 a, b, c는 삼각형 세 변의 길이이므로 $a+b>c$에서 $c^2-(a+b)^2\neq 0$이다. 따라서 $a=b$ 또는 $a^2+b^2=c^2$이 성립하므로 주어진 조건을 만족시키는 삼각형은 $a=b$인 이등변삼각형 또는 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

답 $a=b$인 이등변삼각형 또는 빗변의 길이가 c인 직각삼각형

수학(상) 제01회

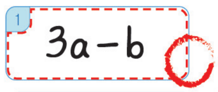
< I 다항식 >

01.다항식의 연산 | 02.항등식과 나머지정리 | 03.인수분해

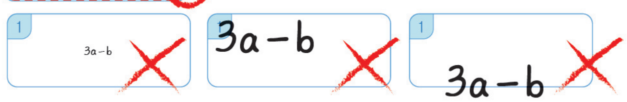
성명		수험번호	0	1	0	-					-				

○ 답안지의 해당 번호란에 반듯한 필체로 답을 작성해주세요. 답안 인식 범위는 빨간 선 내부입니다. 선을 벗어나거나 글자가 작은 경우 인식률이 떨어집니다.

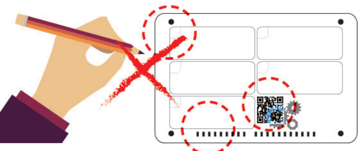
예)



잘못된 예)



○ 답안지의 모서리에 위치한 네 점과 하단의 검정박스, QR코드는 답안을 인식하는 좌표이므로 훼손하지 마세요.



○ 문항에 따라 배점이 다르니 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고해주세요.

○ 채점과 정답 및 해설 확인, 진단평가에 따른 치료문제는 마타수학 앱을 통해 확인하실 수 있습니다.

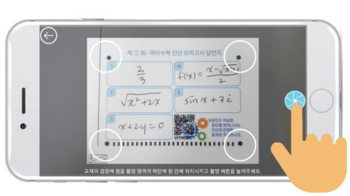
1

① 구글 플레이, 애플 앱 스토어에서 "마타수학"을 검색하거나 QR코드를 스캔하여 앱을 설치하세요.

2

② 어플을 실행시켜 메뉴바의 QR 카메라 버튼을 누르세요.

3



③ 답안의 검정색 원을 촬영범위에 맞추고 촬영버튼을 누르세요.

4

④ 필기한 답안들이 OCR기술로 자동 인식되어 나타납니다.

수학(상) 제01회 〈 I 다항식 〉

01.다항식의 연산 ¦ 02.항등식과 나머지정리 ¦ 03.인수분해

제한시간 30분

1. 다음 식을 인수분해하시오. [2점]

$$2x^2-3xy+y^2-3x+y-2$$

2. $a^2+4b^2+c^2=17$, $2ab+2bc-ca=-16$일 때, $(a-2b+c)^2$의 값을 구하시오. [2점]

3. $x^{32}=120$일 때,

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1)$$

의 값을 구하시오. [2점]

4. x에 대한 다항식 $9x^8+8x^6+7x^4+6x^2+5$를 $x^4+x^3+x^2+x+1$로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(-1)$의 값을 구하시오. [3점]

5. $(x+2x^2+3x^3+\cdots+10x^{10})(1-x+2x^2)$의 전개식에서 x^{11}의 계수를 구하시오. [3점]

-제 ① 회- 마타수학 진단 모의고사 답안지

1	4
2	5
3	

VITRUV

※답안지 작성은 답란을 벗어나서는 안되며 반듯한 필체로 작성하시오.

수학(상) 제01회 〈 I 다항식 〉

01.다항식의 연산 ┆ 02.항등식과 나머지정리 ┆ 03.인수분해

/30점

6. 두 다항식 $A=x-3$, $B=x^2-6x+7$에 대하여

$$A^3-A^2B+2A^2+B^2-AB-2B$$

를 간단히 하시오. [3점]

7. 최고차항의 계수가 3인 삼차식 $P(x)$를 $x-2$, $x-3$, $x-4$로 나눈 나머지가 모두 2일 때, $P(5)$의 값을 구하시오. [3점]

8. 다항식 $f(x)$에 대하여

$$x^4+ax^3+b=(x^2-1)f(x)+2x$$

가 x에 대한 항등식일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

9. x의 값에 관계없이 등식

$$4x^3+15x^2+20x+10=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$$

가 항상 성립하도록 하는 상수 a, b, c, d에 대하여 $ac-bd$의 값을 구하시오. [4점]

10. 2018^3-1을 2017×2019로 나누었을 때, 몫과 나머지의 합을 구하시오. [4점]

-제 ① 회- 마타수학 진단 모의고사 답안지

6	9
7	10
8	

VITRUV

※답안지 작성은 답란을 벗어나서는 안되며 반듯한 필체로 작성하시오.

빠른 정답

01 다항식의 연산

유 제 p.19

01-1 $7x^3-4x^2+4x+3$

2 $5x^3+x^2-14x-13$

3 14

02-1 (1) $2x^4-5x^3+4x^2+7x-4$
(2) x^3-x^2

2 -1

3 35

03-1 (1) $4a^2-28ab+49b^2$
(2) $a^2-8ab+16b^2$
(3) $x^3y^3-12x^2y^2+48xy-64$
(4) $8a^3-1$

2 (1) x^8-y^8 (2) a^6-b^6

3 -9

04-1 (1) $4x^2+y^2+9z^2-4xy+6yz-12xz$
(2) $27a^3-b^3+18ab+8$
(3) $8a^3-b^3+30ab+125$

2 (1) $16a^4+36a^2+81$
(2) $9a^2+162$

3 x^4+9x^2+81

05-1 (1) $-a^2+9b^2-c^2-2ac$
(2) $-4a^2-b^2+c^2+4ab$

2 (1) $x^4+2x^3+5x^2+4x-12$
(2) $9x^4-6x^3+7x^2-2x-15$

3 (1) $x^4+8x^3+19x^2+12x$
(2) $x^4+10x^3+25x^2-36$

06-1 (1) 3 (2) 10 (3) 82

2 7

3 (1) 10 (2) 28 (3) 82

07-1 (1) $4\sqrt{2}$ (2) 198 (3) 1154

2 (1) 3 (2) $2\sqrt{3}$ (3) $6\sqrt{3}$

3 -8

08-1 7

2 50

3 $ab-c$

09-1 $3x^2-12x-3$

2 $2x^3+5x^2+3$

3 x^2+x-2

연습은 실전처럼 p.42

01-1 $7x^2-x-10$

2 -8

3 $a^2-3ab+3b^2$

4 32

5 $9y^2-10$

6 259

7 0

8 (1) 52 (2) $30\sqrt{3}$

9 40

10 140

11 3

12 $2x+9$

실전은 연습처럼 p.44

01-1 $3x^3+x^2+14x+7$

2 92

3 $-6a^2+7ab-2b^2$

4 $3x-2$

5 빗변의 길이가 b인 직각삼각형

6 $4-4\sqrt{2}$

7 몫: $2x-3$, 나머지: $14x^2-19x+13$

8 6

02 항등식과 나머지정리

유 제
p.55

01-1 (1) $a=0,\ b=3$ (2) $a=1,\ b=0$

2 $a=1,\ b=2$

3 2

02-1 (1) $a=-3,\ b=-4,\ c=3$
(2) $a=1,\ b=0,\ c=5$

2 (1) $a=7,\ b=-7,\ c=4$
(2) $a=4,\ b=-2,\ c=5$

3 $a=-3,\ b=-1$

03-1 $-12x+9$

2 $a=3,\ b=4$

3 x^2+x+1

04-1 (1) -7 (2) -2 (3) $\frac{19}{8}$

2 (1) 2 (2) 5 (3) 15

3 6

05-1 4

2 5

3 $4x+2$

06-1 $3x^2-3x+2$

2 $a=-2,\ b=4,\ c=3$

3 $x^4+2x^3+2x^2+2x-6$

07-1 -5

2 2

3 $-\frac{11}{4}$

08-1 $a=-4,\ b=5$

2 $-2x+6$

3 $a=2,\ b=-1,\ c=3,\ d=-4$

연습은 실전처럼
p.74

01-1 7

2 8

3 $a=-4,\ b=3$

4 6

5 $p=1,\ q=2$

6 145

7 3

8 11

9 $\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$

10 33

11 -4

12 $a=1,\ b=1,\ c=1,\ d=2$

실전은 연습처럼
p.76

01-1 -5

2 2

3 40

4 x^2+5x+5

5 24

6 $5x^2-9x+5$

7 1

8 6

03 인수분해

유 제
p.85

01-1 (1) $3xy(x+3y-8)$
(2) $6ab(2ac+a-3c)$
(3) $(ab-1)(a-x)$
(4) $3(3x-1)(x-2)$

2 (1) $(4ab+7)(4ab-7)$
(2) $-(3x+y)(x-3y)$
(3) $2(a-3b)^2$
(4) $(x+y)(x+y+1)$

3 (1) $(ab-1)^3$ (2) $(3x-2y)^3$
(3) $(2a+b+2)(4a^2+b^2+4ab-4a-2b+4)$
(4) $(x-y-z)(x^2+y^2+z^2-2xy-yz+zx)$

02-1 (1) $(x-y-z)^2$ (2) $(3a-b+2c)^2$

2 (1) $(3a-2b+c)(9a^2+4b^2+c^2+6ab+2bc-3ca)$

(2) $(2x-y+4)(4x^2+y^2+2xy-8x+4y+16)$

3 -9

03-1 (1) $x(x-1)(x+2)(x+3)$

(2) $(x^2+6x-2)(x^2+6x+10)$

2 (1) $(a+b)(a-b)(a+3b)(a-3b)$

(2) $(x+2)(x-2)(2x+1)(2x-1)$

3 25

04-1 (1) $(a+2b+1)(2a+b+1)$

(2) $(x-y)(x+y^2+2)$

2 $(b-c)(a^2+b^2+c^2)$

3 $(a+b)(b+c)(c+a)$

05-1 (1) $(x+1)(x+2)(x+3)$

(2) $(2a+1)(a^3+2a+1)$

2 $a=-4$, $b=2$, $c=2$

3 -1

06-1 (1) 2019 (2) 100

2 16

3 정삼각형

연습은 실전처럼

p.100

01-1 (1) $-(2a-b-1)(2a-b+1)$

(2) $(a-b)(a^2+b^2+ab+6a+6b+12)$

(3) $(2x-y+1)^2$

2 $p=3$, $q=-2$

3 15

4 ㄱ, ㄹ

5 $(x^2+y^2-z^2)^2$

6 (1) $(2x-1)(x+1)(2x^2+x+2)$

(2) $(a^2+a+3)(a^2+a-5)$

(3) $(3a^2+ab-b^2)(3a^2-ab-b^2)$

(4) $(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$

7 $(x+2)(x-1)$

8 -5

9 $2x^2+4x-2$

10 313

11 160

12 빗변의 길이가 b인 직각삼각형

실전은 연습처럼

p.102

01-1 (1) $(x-y)(x+y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$

(2) $(x+1)(x-2)(x^2-x+1)(x^2+2x+4)$

2 -1

3 $(a-b)(b-c)(c-a)$

4 $2x^2+6x-2$

5 6

6 $(x^2-x+1)(x^2+3x+1)$

7 $-\dfrac{3}{2}$

8 $a=b$인 이등변삼각형

또는 빗변의 길이가 c인 직각삼각형